ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 15 Oktober 1935 Heft 5

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Ausbreitung der Kraft in der Halbebene und im Halbraum bei anisotropem Material.

Von *K. Wolf* in Wien.

Die Untersuchungen, die in der Erdbaumechanik über die Verteilung der Spannungen und Verschiebungen im Erdboden bei der Fundierung von Bauwerken angestellt wurden, haben ziemlich beträchtliche Abweichungen gegenüber dem in einem elastischen Körper unter gleichen Bedingungen herrschenden Spannungszustand ergeben. Dies rührt wohl in erster Linie davon her, daß ein solcher Erdkörper nur sehr angenähert die Bedingungen eines elastischen Mediums erfüllt. Zum Teil mag aber dabei auch der Umstand eine Rolle spielen, daß der Erdboden sich nicht isotrop verhält, daß etwa bei einem Boden, wo sandige und tonige Schichten aufeinanderfolgen, die Elastizitätsmodule in horizontaler und vertikaler Richtung stark voneinander verschieden sind. Daher soll für derartiges anisotropes Material im folgenden die Ausbreitung der Kraft, also das zum Boussinesqschen analoge Problem, im ebenen und im achsialsymmetrischen Fall dargestellt werden. Das letztere ist allerdings schon von Michell[1]) behandelt worden; da aber die Art der Darstellung und die Methoden der Lösung etwas andere sind, so dürfte auch die Behandlung dieses Falles nicht überflüssig sein.

Das ebene Problem: Wir wollen unser Koordinatensystem so legen, daß die positive y-Achse vertikal nach abwärts, die positive x-Achse horizontal nach links gerichtet ist (vgl. Abb. 1). In der x-Richtung sei der Zugelastizitätsmodul E_1, in der y-Richtung E_2; das Hookesche Gesetz können wir dann in der Form ansetzen

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_1} - \nu_1 \frac{\sigma_y}{E_2} \qquad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_2} - \nu_2 \frac{\sigma_x}{E_1} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1),$$

wo ε_x, ε_y und σ_x, σ_y die übliche Bedeutung haben — es sind die Dehnungs- und die Normalspannungskomponenten — ν_1 und ν_2 entsprechen den Poissonschen Zahlen für beide Richtungen. Da wir mit einer Vermehrung der Zahl der Elastizitätskonstanten um eine einzige, also im ganzen mit drei auskommen wollen, so läge es nahe, $\nu_1 = \nu_2$ zu setzen, da kleine Abweichungen in der Poissonschen Zahl keinen großen Einfluß auf das Spannungs- und Verschiebungsbild haben. Das geht aber nicht so ohne weiteres, da immer die Bedingung erfüllt sein muß, daß die Spannungskomponenten sich als Ableitungen der Verzerrungsenergiefunktion nach den Verzerrungskomponenten ergeben. Die elastischen Konstanten sind bekanntlich die Koeffizienten in dieser homogenen, quadratischen Form. Unter Berück-

[1]) Proc. Lond. Math. Soc., Bd. 32, 1901, p. 247.

sichtigung der Symmetriebedingungen in unserem Ansatz — für den Übergang von $+x$ zu $-x$ darf sich die Funktion nicht ändern — bekommen wir

$$2\,W = A\,\varepsilon_x^2 + B\,\varepsilon_y^2 + 2\,C\,\varepsilon_x\,\varepsilon_y + D\,\gamma_{xy}^2$$

und daher

$$-\sigma_x = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} = 2\,A\,\varepsilon_x + 2\,C\,\varepsilon_y\,, \qquad -\sigma_y = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} = 2\,B\,\varepsilon_y + 2\,C\,\varepsilon_x\,, \qquad \tau_{xy} = 2\,D\,\gamma_{xy}\,.$$

Wenn man die Gl. (1) nach den Spannungskomponenten auflöst, so müssen demnach die Koeffizienten von ε_x und ε_y in den beiden Gleichungen übereinstimmen. Das gibt

$$\nu_1 = \frac{E_2}{E_1}\,\nu_2 = \frac{E_2}{E_1}\,\nu\,,$$

wenn man an Stelle von ν_2 jetzt ν schreibt. Für den Schubelastizitätsmodul setzen wir $G = \dfrac{E_1\,E_2}{E_1 + E_2\,(1+2\,\nu)}$, so daß die Beziehungen zwischen Verzerrungs- und Spannungskomponenten die Gestalt haben

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_1} - \nu\,\frac{\sigma_y}{E_1}\,, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_2} - \nu\,\frac{\sigma_x}{E_1}\,, \quad \gamma_{xy} = \left(\frac{1}{E_2} + \frac{1+2\,\nu}{E_1}\right)\tau_{xy} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Die kubische Dilatation e hat die Form

$$e = \frac{1-\nu}{E_1}\,\sigma_x + \left(\frac{1}{E_2} - \frac{\nu}{E_1}\right)\sigma_y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Wenn die Airysche Spannungsfunktion F in der bekannten Weise eingeführt wird und die Spannungskomponenten daher die Form haben

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,,$$

so erhalten wir für F aus der Kompatibilitätsbedingung

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}$$

die Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{E_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{E_1}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\nabla^2 F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

wo $\nabla^2 F$ den Laplaceschen Operator bedeutet. In Verbindung mit (2) ergibt sich daraus für die Volumsdehnung die Beziehung $\nabla^2 e = 0$, e ist also auch jetzt eine harmonische Funktion. Setzen wir $\dfrac{E_2}{E_1} = k^2$, so läßt sich (4) in der Form schreiben

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\nabla^2 F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4a).$$

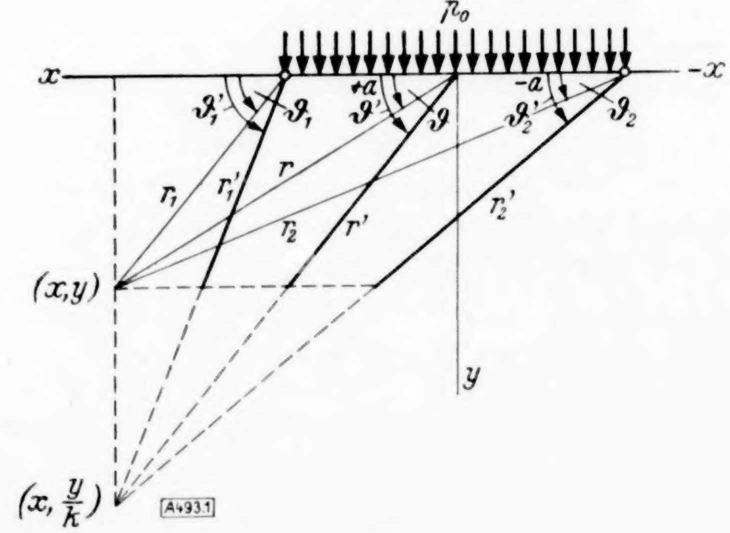


Abb. 1.

Wir wollen zunächst den Fall betrachten, daß über ein Stück der Halbebene von der Breite 2a eine konstante Belastung p_0 verteilt ist, der übrige Rand sei spannungsfrei (siehe Abb. 1). Für isotropes Material hat die entsprechende Spannungsfunktion die Gestalt[2])

$$F = \frac{1}{2\pi}\,p_0\,(r_2^2\,\vartheta_2 - r_1^2\,\vartheta_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

[2]) Love: Lehrbuch der Elastizität, § 151.

Die Bezeichnungen sind dieselben wie in der Abbildung. Für den äolotropen Fall wollen wir zunächst die dem Wert $r^2 \vartheta$ allein entsprechende Lösung suchen.

Setzen wir in (4a) für y den Wert $k\,y_1$, so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right) \nabla^2 F = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Da $\nabla^2 (r^2 \vartheta) = 4\,\vartheta$ ist, so werden wir als Lösung von (6) den Wert

$$\nabla^2 F = c\,\vartheta' = c \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x} = c \operatorname{arctg} \frac{y}{k\,x} = c \operatorname{arctg} \left(\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{k}\right)$$

nehmen. Führt man Polarkoordinaten ein

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} = c\,\vartheta' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

und setzt als Lösung $F = r^2\,\Theta$ ein, wo Θ allein Funktion von ϑ ist, so erhält man als Differentialgleichung für Θ

$$\frac{d^2\,\Theta}{d\,\vartheta^2} + 4\,\vartheta = c\,\vartheta' .$$

Wendet man die Methode der Variation der Konstanten auf die Lösung der homogenen Gleichung

$$\Theta = A \sin 2\,\vartheta + B \cos 2\,\vartheta$$

an, wo also A und B als Funktionen von ϑ angesehen und aus den Gleichungen

$$A' \sin 2\,\vartheta + B' \cos 2\,\vartheta = 0 \qquad 2 \cos 2\,\vartheta\, A' + 2 \sin 2\,\vartheta\, B' = c\,\vartheta'$$

berechnet werden, so erhält man

$$A' = \frac{d\,A}{d\,\vartheta} = \frac{c}{2}\,\vartheta' \cos 2\,\vartheta \qquad B' = \frac{d\,B}{d\,\vartheta} = -\frac{c}{2}\,\vartheta' \sin 2\,\vartheta \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

und daraus

$$\left.\begin{aligned} A &= C_1 + \frac{c}{4}\left\{\vartheta' \sin 2\,\vartheta + \frac{k}{1-k^2} \ln \frac{1+\mathrm{tg}^2\,\vartheta}{k^2+\mathrm{tg}^2\,\vartheta} - \frac{1}{2}\right\} \\ B &= C_2 + \frac{c}{4}\left\{\vartheta' \cos 2\,\vartheta + \frac{2}{1-k^2}\left[k\,\vartheta - (k^2+1)\frac{\vartheta'}{2}\right]\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Beim Übergang zum isotropen Medium für $k^2 = 1$ geht der Ausdruck für Θ in den richtigen Wert $\frac{c}{4}\,\vartheta$ über, da

$$\lim_{k^2 \to 1} \frac{k}{1-k^2} \ln \frac{1+\mathrm{tg}^2\,\vartheta}{k^2+\mathrm{tg}^2\,\vartheta} = \cos^2 \vartheta$$

und

$$\lim_{k^2 \to 1} \frac{2}{1-k^2}\left[k\,\vartheta - (1+k^2)\frac{\vartheta'}{2}\right] = -\frac{1}{2} \sin 2\,\vartheta$$

ist. Setzt man C_1 und C_2 gleich Null und führt wieder kartesische Koordinaten ein, so nimmt F die Gestalt an

$$F = r\,\Theta = \frac{c}{4}\left[2\,x\,y\,A + (x^2 - y^2)\,B\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Dabei ist mit $r'^2 = k^2\,x^2 + y^2$

$$\left.\begin{aligned} A &= 2\,\vartheta' \frac{x\,y}{r^2} - \frac{1}{2} + \frac{k}{1-k^2} \ln \frac{r^2}{r'^2} \\ B &= \vartheta' \frac{x^2 - y^2}{r^2} + \frac{2\,k}{1-k^2}\left(\vartheta - \frac{1+k^2}{2\,k}\,\vartheta'\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\,A}{\partial\,x} &= -2\,\vartheta'\,y\,\frac{x^2-y^2}{r^4} \qquad & \frac{\partial\,A}{\partial\,y} &= 2\,\vartheta'\,x\,\frac{x^2-y^2}{r^4} \\ \frac{\partial\,B}{\partial\,x} &= 4\,\vartheta' \frac{x\,y^2}{r^4} \qquad & \frac{\partial\,B}{\partial\,y} &= -4\,\vartheta' \frac{x^2\,y}{r^4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

Subtrahiert man nun entsprechend der Formel (5) von der Lösung mit $x=+a$, $y=0$ als Zentrum die mit dem Zentrum $x=-a$, $y=0$ (siehe die Abb. 1), so erhält man als endgültigen Wert

$$F=\frac{c}{4}\left[2\,y\,(x-a)\,A_1+((x-a)^2-y^2)\,B_1-2\,y\,(x+a)\,A_2-((x+a)^2+y^2)\,B_2\right] \quad . \quad (13),$$

wo für $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ die Ausdrücke aus den Gl. (11) eingesetzt sind, das eine Mal mit dem Weiser 1 für ϑ, ϑ' und r, r' und mit $x-a$ statt x, das andere Mal mit dem Weiser 2 und $x+a$ statt x.

Die Spannungskomponenten ergeben sich daraus, wenn man noch $c=\frac{p_0(1+k)}{\pi\,k}$ setzt, zu

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{p_0}{\pi\,(1-k)}\left[\frac{1}{k}\,(\vartheta'_1-\vartheta'_2)\,k-(\vartheta_1-\vartheta_2)\right]\\
\sigma_y&=\frac{p_0}{\pi\,(1-k)}\left[(\vartheta_1-\vartheta_2)-k\,(\vartheta'_1-\vartheta'_2)\right]\\
\tau_{xy}&=\frac{p_0}{\pi\,(1-k)}\left[\ln\frac{r_2^{\,2}}{r'^{\,2}_2}-\ln\frac{r_1^{\,2}}{r'^{\,2}_1}\right]
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Für $y=0$, also $r_1=x-a$, $r_2=x+a$, $r'_1=k\,r_1$, $r'_2=k\,r_2$ verschwindet τ_{xy}, und σ_y nimmt außerhalb von $x=+a$ und außerhalb von $x=-a$ den Wert Null an, da dort $\vartheta_1=\vartheta_2=\vartheta_1=\vartheta'_2$ gleich Null beziehungsweise gleich π ist. Auf der Strecke zwischen $+a$ und $-a$ haben wir aber $\sigma_y=p_0$, da dort $\vartheta_1=\vartheta'_1=+\pi$ und $\vartheta_2=\vartheta'_2=0$ ist. Man erkennt also, daß die Randbedingung befriedigt ist. Wenn man auch das Eigengewicht des Materiales berücksichtigt, so hat man in bekannter Weise zu σ_y noch den Summand $-\gamma\,x$ hinzuzufügen; γ ist dabei das spezifische Gewicht des Erdreiches.

Um nun die Lösung für eine Einzelkraft zu erhalten, hat man nur (13) nach a zu differentiieren und zur Grenze a gleich Null überzugehen. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial a}=\frac{c}{4}\Big\{&-2\,y\,A_1+2\,y\,(x-a)\frac{\partial A_1}{\partial a}-2\,(x-a)\,B_1+[(x-a)^2-y^2]\frac{\partial B_1}{\partial a}\\
&-2\,y\,A_2-2\,y\,(x+a)\frac{\partial A_2}{\partial a}-2(x+a)\,B_2-[(x-a)^2+y^2]\frac{\partial B_2}{\partial a}\Big\}
\end{aligned}$$

und

$$\lim_{a\to 0}\frac{\partial F}{\partial a}=F_1=-c\,(y\,A+x\,B) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

wobei $\vartheta_1=\vartheta_2=\vartheta$, $A_1=A_2=A$ und $B_1=B_2=B$ gesetzt ist.

Bezeichnet man den Betrag der im Ursprung vertikal nach abwärts wirkenden Kraft mit P, so ist $c=-\frac{P}{\pi}$ zu setzen und man erhält durch Differentiation unter Berücksichtigung der Gl. (12) die Spannungskomponenten

$$\sigma_x=-\frac{2\,P}{\pi}\,\frac{k\,x^2\,y}{r^2\,r'^{\,2}},\quad \sigma_y=-\frac{2\,P}{\pi}\,\frac{k\,y^3}{r^2\,r'^{\,2}},\quad \tau_{xy}=-\frac{2\,P}{\pi}\,\frac{k\,x\,y^2}{r^2\,r'} \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Für $k=1$, also $r'=r$, gehen diese Ausdrücke in die bekannten Werte der Boussinesqschen Lösung für die Halbebene über.

Die Werte der Verschiebungen ξ und η ergeben sich aus den Gl. (2) zu

$$\left.\begin{aligned}
\xi&=\frac{2\,P}{\pi}\,\frac{1}{E_1\,(E-E_2)}\left\{(E_1+\nu\,E_2)\,\vartheta'-E_2\,(1+\nu)\,\vartheta\right\}\\
\eta&=\frac{2\,P}{\pi}\,\frac{\sqrt{E_1\,E_2}}{E_1-E_2}\left\{\frac{1+\nu}{E_1}\ln r'-\left(\frac{1}{E_2}+\frac{\nu}{E_1}\right)\ln r\right\}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Für $E_1=E_2$ bekommt man in Übereinstimmung mit der Boussinesqschen Lösung

$$\xi=\frac{P}{\pi\,E}\left\{\frac{x\,y}{r^2}\,(1+\nu)+\vartheta\,(1-\nu)\right\},\qquad \eta=-\frac{P}{\pi\,E}\left\{\frac{x^2}{r^2}\,(1+\nu)+2\ln r\right\}.$$

Für die Oberfläche $y=0$ ergibt sich für die Einsenkung η der Wert

$$\eta=-\frac{2\,P}{\pi\sqrt{E_1\,E_2}}\ln r\,.$$

Der axialsymmetrische Fall. Bei Verwendung von Zylinderkoordinaten ϱ, ϑ und z sind die Verzerrungskomponenten bei Berücksichtigung der axialen Symmetrie

$$\varepsilon_\varrho = \frac{\partial u}{\partial \varrho}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{\varrho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{z\varrho} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18),$$

wobei u die Verschiebung in radialer und w die Verschiebung in axialer Richtung bedeutet. Die spezifische Verzerrungsenergiefunktion hat die Form

$$2W = A\,\varepsilon_\varrho^2 + B\,\varepsilon_\vartheta^2 + C\,\varepsilon_z^2 + 2\,D\,\varepsilon_\varrho\,\varepsilon_\vartheta + 2\,E\,\varepsilon_\varrho\,\varepsilon_z + 2\,F\,\varepsilon_\vartheta\,\varepsilon_z + G\,\gamma_{z\varrho}^2$$

die Glieder $\varepsilon_\varrho\,\gamma_{z\varrho}\ldots$ verschwinden, weil für $+z$ und $-z$ der Wert der Funktion sich nicht ändern darf. Berücksichtigt man jetzt die Querisotropie in der Weise, daß man ähnlich wie im vorher behandelten Fall das Hookesche Gesetz in der Form anschreibt:

$$\varepsilon_\varrho = \frac{\sigma_\varrho}{E_1} - \nu_1\frac{\sigma_\vartheta}{E_1} - \nu_2\frac{\sigma_z}{E_2}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{\sigma_\vartheta}{E_1} - \nu_1\frac{\sigma_\varrho}{E_1} - \nu_2\frac{\sigma_z}{E_2}, \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E_2} - \nu_1\frac{\sigma_\varrho}{E_1} - \nu_1\frac{\sigma_\vartheta}{E_1} \quad . \quad (19).$$

E_1 ist dabei der Elastizitätsmodul in der zur Achse senkrechten Richtung, E_2 der in der Richtung der Achse, ν_1 und ν_2 sind die analogen Poissonschen Zahlen. Will man wieder die Zahl der elastischen Konstanten nur um eine vermehren, so muß man, ebenso wie früher, die Bedingung berücksichtigen, daß sich die Spannungskomponenten als Ableitungen der Verzerrungsenergiefunktion nach den Verzerrungskomponenten darstellen; man erhält daraus die Beziehung $\nu_1\,E_2 = \nu_2\,E_1$. Da nun bei Erdkörpern die Werte von ν sehr klein sind und ihre experimentelle Bestimmung unzuverlässig ist, möge für das Weitere ν_1 und ν_2 gleich Null gesetzt werden, obwohl sich die Rechnung auch allgemein durchführen ließe. Dann bekommen wir aus (19)

$$\sigma_\varrho = E_1\,\varepsilon_\varrho, \quad \sigma_\vartheta = E_1\,\varepsilon_\vartheta, \quad \sigma_z = E_2\,\varepsilon_z, \quad \tau_{\varrho z} = \frac{E_1\,E_2}{E_1 + E_2}\,\gamma_{\varrho z} \quad \ldots \ldots \quad (20).$$

Setzt man dies unter Berücksichtigung von (18) in die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho\,\sigma_\varrho) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho\,\tau_{\varrho z}) - \sigma_\vartheta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho\,\tau_{\varrho z}) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho\,\sigma_z = 0 \quad \ldots \quad (21)$$

ein, so erkennt man durch Differentiation der beiden Gleichungen nach ϱ und z und darauffolgende Addition, daß die kubische Dilatation $e = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho\,u) + \frac{\partial w}{\partial z}$ wieder der Gleichung

$$\nabla^2 e = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

genügt.

Drückt man nun analog dem bekannten Verfahren bei Isotropie[3]) u und w durch eine Funktion Φ in folgender Weise aus:

$$u = -\frac{1}{E_1}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho\,\partial z}, \quad w = \frac{1}{E_1}\left\{\frac{E_1 + E_2}{E_2}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (23),$$

so nimmt e die Gestalt an

$$e = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{E_2}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{E_1}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right\}.$$

Aus Gl. (22) ergibt sich dann für Φ die Differentialgleichung

$$\frac{1}{E_2}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\frac{\partial \nabla^2 \Phi}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{E_1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\nabla^2 \Phi) = 0,$$

oder wenn man für $\frac{E_2}{E_1}$ wieder k^2 setzt

$$\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\varrho}\left(\varrho\frac{\partial}{\partial \varrho}\right) + k^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\nabla^2 \Phi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24).$$

Bei dem entsprechenden Problem für den isotropen Fall ist Φ, abgesehen von einer multiplikativen Konstanten durch den Ansatz

$$\Phi = -\frac{z}{2}\ln(r + z)$$

[3]) Love-Timpe: Lehrbuch der Elastizität, § 188.

gegeben — r ist dabei $\sqrt{\varrho^2+z^2}$ — und daher $\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r}$. Wenn man in (24) an Stelle von z den Wert $z_1 = k z$ einführt, so nimmt der Klammerausdruck, geschrieben in ϱ und z_1, die Form des Laplaceschen Operators an und es ist demnach

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r'} \qquad \qquad (25)$$

eine Lösung dieser Gleichung, wobei $r' = \sqrt{\varrho^2 + k^2 z^2}$ gesetzt ist. Es ist also nur mehr die Gl. (25) zu integrieren. In räumlichen Polarkoordinaten hat bei Berücksichtigung der axialen Symmetrie (25) die Gestalt

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\operatorname{cotg} \vartheta}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = \frac{1}{r'} \qquad \qquad (26),$$

ϑ bedeutet dabei, wie üblich, den Winkel zwischen r und der positiven z-Achse. Setzt man Φ gleich $r\,\Theta$, wo Θ eine Funktion von ϑ allein sein soll, so erhält man

$$\frac{d^2 \Theta}{d \vartheta^2} + \operatorname{cotg} \vartheta \frac{d \Theta}{d \vartheta} + 2\Theta = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \vartheta + k^2 \cos^2 \vartheta}} \qquad \qquad (27).$$

Das Integral der homogenen Gleichung ist bekanntlich durch die Kugelfunktion erster Ordnung gegeben[4]) und mit der Methode der Variation der Konstanten ergibt sich das allgemeine Integral von (27) zu

$$\Theta = A \cos \vartheta + B\left(-1 + \frac{\cos \vartheta}{2} \ln \frac{1+\cos \vartheta}{1-\cos \vartheta}\right),$$

wo

$$A = \frac{1}{2(1-k^2)}\left[\sin \vartheta' \ln \frac{1+\cos \vartheta}{1-\cos \vartheta} - k \ln \frac{\sqrt{1-k^2}\operatorname{tg} \vartheta' + k}{\sqrt{1-k^2}\operatorname{tg} \vartheta' - k}\right], \qquad B = \frac{1}{1-k^2}(1 - \sin \vartheta')$$

gesetzt sind, wobei ϑ und ϑ' durch die Beziehung $\cos \vartheta' = \sqrt{1-k^2} \cos \vartheta$ verknüpft sind. Führt man für ϑ und ϑ' wieder z ein, gemäß den Formeln $\cos \vartheta = \frac{z}{r}$, $\cos \vartheta' = \frac{\sqrt{1-k^2}\, z}{r}$, so bekommt man

$$\Phi = \frac{1}{1-k^2}\left[r' - r + \frac{z}{2}\left(\ln \frac{r+z}{r-z} - k \ln \frac{r'+kz}{r'-kz}\right)\right].$$

Um für $k=1$ den Wert für den isotropen Körper zu erhalten, hat man noch den Ausdruck $\varphi_1 = \frac{z}{4} \ln (r^2 - z^2)$, der ja ebenfalls eine Lösung von $\nabla^2 \varphi = 0$ ist, hinzuzufügen und alle Glieder mit k^2 zu multiplizieren. Dann ergibt sich als endgültiger Wert:

$$\Phi = \frac{k^2}{1-k^2}\left[r' - r + \frac{z}{2}\left(\ln \frac{r+z}{r-z} - k \ln \frac{r'+kz}{r'-kz}\right)\right] + \frac{k^2 z}{4} \ln (r^2 - z^2) \qquad \qquad (28).$$

Aus (23) erhält man mit $\varrho^2 = r^2 - z^2$, wenn die im Zentrum nach abwärts wirkende Kraft mit $-P$ bezeichnet wird:

$$u = -\frac{P E_2}{\pi E_1{}^2}\left[\frac{1}{E_1 - E_2}\frac{z}{\varrho}\left(\frac{E_1}{r} - \frac{E_2}{r'}\right) - \frac{1}{2\varrho}\right], \qquad w = -\frac{P E_2}{\pi E_1{}^2 r'}\left[\frac{1}{(E_1 - E_2)}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) + \frac{E_2}{E_1{}^2}\frac{1}{r'}\right] \quad (29).$$

Auf der Oberfläche $z=0$ ist $w = -\frac{P}{\pi}\frac{E_2}{E_1{}^2}\frac{1}{r'}$. Die Spannungskomponenten sind:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\varrho &= -\frac{P}{\pi}\frac{E_2}{E_1}\left\{\frac{z}{E_1 - E_2}\left[\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{E_2}{r'} - \frac{E_1}{r}\right) + \left(\frac{E_2}{r'^3} - \frac{E_1}{r^3}\right)\right] + \frac{1}{2\varrho^2}\right\} \\
\sigma_\vartheta &= -\frac{P}{\pi}\frac{E_2}{E_1}\left[\frac{1}{E_1 - E_2}\frac{z}{\varrho^2}\left(\frac{E_1}{r} - \frac{E_2}{r'}\right) - \frac{1}{2\varrho^2}\right] \\
\sigma_z &= -\frac{P}{\pi}\frac{E_2}{E_1} z\left[\frac{1}{E_1 - E_2}\left(\frac{E_1}{r^3} - \frac{E_2}{r'^3}\right) - \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^2 \frac{1}{r'^3}\right], \qquad \tau_{\varrho z} = -\frac{P E_2}{\pi (E_1 - E_2)}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (30).$$

Beim Grenzübergang für $k=1$, also $E_1 = E_2 = E$ bekommt man die bekannten, für Isotropie gültigen Werte.

[4]) Jahnke u. Emde: Funktionentafeln, 2. Aufl., S. 176.

Numerische Durchrechnung zu der Abhandlung über Grundwasserströmung[1]).

(Abhandlungen zur Hydrodynamik IV.)

Von *Georg Hamel* und *Erich Günther* in Berlin.

Der zweite Verfasser hat sich der mühsamen Arbeit unterzogen, zu der Abhandlung des ersten Verfassers die nötigen numerischen Rechnungen auszuführen. Wir veröffentlichen hier von diesen Rechnungen einen Auszug, und zwar geben wir die Methoden und Zahlenwerte zur Berechnung des inneren Integrals

$$\int_0^1 \frac{\gamma(t)\,dt}{t-\lambda}$$

ausführlich, für das Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ in II, 2., für die anderen Intervalle in VI, 1. 2. 3. Dieses Integral wird immer wieder gebraucht werden, wenn jemand weitere Fälle ausrechnen will. Dagegen geben wir die Schlußrechnung, das äußere Integral nur für je einen Wert der beiden Parameter, stark gekürzt. Wir geben Interessenten natürlich gerne unser volles Zahlenmaterial. Das Ergebnis ist in VII in der Schlußfigur dargestellt.

Die Gelegenheit soll benutzt werden, hier eine wesentliche Berichtigung zu der Arbeit von 1934 anzubringen. 4. Die Randwertaufgabe, Fall 2, Wassergrenze enthält einen Zeichenfehler. In der letzten Zeile von Seite 135 muß es links statt rechts heißen. Infolgedessen muß es in Zeile 4 von Seite 136 heißen:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} + n\pi + 2\alpha.$$

In den folgenden Zeilen ist $\frac{dw}{ds} > 0$ zweimal zu streichen, in Zeile 7 muß grade in ungrade verbessert werden und hinter also hinzugefügt werden: da

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

In Zeile 10 muß umgekehrt ungrade in grade verbessert werden und hinzugefügt werden: da

$$\alpha = -\frac{\pi}{2}.$$

Die unterstrichenen Hauptergebnisse sind richtig, und deshalb ändert sich an den weiteren Ergebnissen nichts.

Hamel.

I. Formelzusammenstellung.

Das Strömungsbild des Grundwassers ist bestimmt durch das Integral

$$z = C \int_{\lambda=a}^{u-iv} e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}dt} \sqrt{\frac{\lambda-1}{(\lambda-b)(a-\lambda)\lambda}}\, d(u-iv) \quad \ldots \ldots \quad (A).$$

Dabei gilt

$$q = i\frac{\nu}{g}(u-iv) \quad \ldots \ldots \quad (B).$$

wo q die Variable in der Ebene der Hodographenfigur ist (Abb. 1). ν bedeutet eine positive Materialkonstante, g die Anziehungsbeschleunigung der Erde.

Durch die Modulfunktion $\lambda(q)$ wird die q-Ebene auf die obere Halbebene abgebildet, und zwar so, daß

$$\lambda(0) = 0, \qquad \lambda(1) = 1, \qquad \lambda(i\infty) = -\infty, \qquad \lambda(1+i\infty) = \infty$$

wird (Abb. 2). Der λ-Wert von A''' wird a, der von E''' wird b genannt, wobei $a > b$. Die für einen bestimmten Strömungsfall konstanten a und b

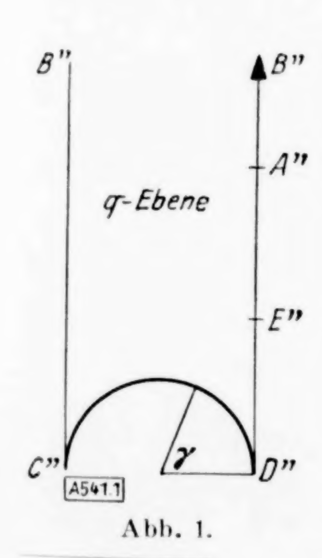


Abb. 1.

λ-Ebene

B''' 0 1 B'''

C''' D''' E''' A'''

A541.2

Abb. 2.

[1]) In dieser Zeitschrift, Bd. 14, Heft 3.

wurden in der vorliegenden Arbeit willkürlich angenommen. γ ist der Zentriwinkel eines Bogens des Halbkreises $D'' C''$ (Abb. 1). γ und q sind miteinander verbunden durch

$$1 - \frac{1}{q} = i \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Die Konstante C bestimmt das Größenverhältnis der Strömungsfigur.

Nach Schwarz, Artikel 42, oder „Abhandlung", Seite 141, gelten die Entwicklungen: in der Nähe von $\lambda = 0$, $q = 0$:

$$q = \frac{\pi i}{\ln \frac{1}{\lambda} + \pi i + \ln 16 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{13}{64}\lambda^2 \ldots} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

in der Nähe von $\lambda = 1$, $q = 1$:

$$q = 1 + \frac{\pi i}{\ln \frac{1}{\lambda - 1} + \ln 16 - \frac{1}{2}(1-\lambda) - \frac{13}{64}(1-\lambda)^2 \ldots} \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

in der Nähe von $\lambda = \infty$, $q = \infty$:

$$q = 1 + \frac{1}{\pi i}\left(-\ln \lambda - \ln 16 + \frac{1}{2\lambda} + \frac{13}{64}\frac{1}{\lambda^2} + \ldots\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

II. Die Berechnung des inneren Integrals $\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t - \lambda}\, dt$ für $0 \leq \lambda \leq 1$.

1. Die Berechnung von $\gamma(t)$. Aus Formel (1) folgt

$$\gamma = -2 \operatorname{arctg} i \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Wegen (2) gilt

$$1 - \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{\pi i}\left(\ln \frac{1}{\lambda} + \pi i + \ln 16 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{13}{64}\lambda^2 \ldots\right) = \frac{1}{\pi i}\left(\ln \frac{\lambda}{16} + \frac{1}{2}\lambda + \frac{13}{64}\lambda^2 + \ldots\right).$$

Mithin ist

$$\gamma(\lambda) = -2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\pi}\left(\ln \frac{\lambda}{16} + \frac{1}{2}\lambda + \frac{13}{64}\lambda^2 + \ldots\right).$$

Nun ist (Schwarz, Artikel 42) der aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannte Quotient

$$\pi i \frac{K'}{K} = \ln \frac{k^2}{16} - \frac{1}{2} k^2 - \frac{13}{62} k^2 \ldots .$$

Es wird also

$$\gamma(k^2) = 2 \operatorname{arctg} \frac{K'}{K}.$$

$K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ und $K' = F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right)$ sind vollständige elliptische Integrale, die mit k^2 oder k'^2 als Argument in der Tafel von Hayashi[2]) tabuliert sind.

Bei den Erörterungen über das Poissonsche Integral (Abhandlung S. 139) ist t als Integrationsvariable in der λ-Ebene gewählt worden. λ selbst dagegen ist in dem inneren Integral $\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t - \lambda}\, dt$ ein Parameter. $\gamma(t)$ läßt sich also punktweise leicht aus der genannten Tafel für jedes t berechnen, als Funktion von t dagegen wird sie beim Integrieren recht unhandlich.

Die folgende Tabelle ist mit Hilfe der Tafel von Hayashi, Seite 61, berechnet worden. Hayashi benutzt andere Bezeichnungen. Unser t entspricht bei ihm dem k^2, $M \pi \frac{K'}{K}$ dem $\log_{10} q$. Die Beziehung zwischen k^2 und unserem λ ist gegeben durch $\lambda = 1 - 1/k^2$.

Abb. 3 veranschaulicht den Verlauf der Funktion $\gamma = \gamma(t)$. Die Kurve ist symmetrisch. Ihr Wendepunkt liegt bei $t = 0{,}5$. Die Symmetrie der Kurve erklärt sich aus den Abbildungseigenschaften der Modulfunktion. Den Punkten des Kreises im Moduldreieck werden die

[2]) K. Hayashi: Tafeln der Besselschen — Theta — Kugel- und andern Funktionen. Verl. Springer 1930.

t	$M \cdot \pi \frac{K'}{K}$	$\frac{K'}{K}$	$\operatorname{arctg} \frac{K'}{K} = \frac{\gamma(t)}{2}$
0,00001	7 — 0,79588	4,547	1,354
0,00002	6 — 0,09691	4,321	1,344
0,00003	6 — 0,27301	4,197	1,337
0,00004	6 — 0,39795	4,106	1,332
0,00005	6 — 0,49486	4,035	1,328
0,00006	6 — 0,57404	3,977	1,324
0,00007	6 — 0,64099	3,928	1,321
0,00008	6 — 0,69899	3,885	1,319
0,00009	6 — 0,67501	3,848	1,316
0,00010	6 — 0,67590	3,814	1,314
0,0002	5 — 0,09695	3,594	1,299
0,0003	5 — 0,27307	3,465	1,289
0,0004	5 — 0,39803	3,373	1,283
0,0005	5 — 0,49496	3,302	1,277
0,0007	5 — 0,64113	3,195	1,267
0,0009	5 — 0,75032	3,115	1,260
0,0011	5 — 0,83751	3,051	1,254
0,0013	5 — 0,91010	2,998	1,249
0,0015	5 — 0,97230	2,952	1,244
0,002	4 — 0,09734	2,860	1,234
0,003	4 — 0,27365	2,731	1,219
0,004	4 — 0,39881	2,639	1,209
0,005	4 — 0,49594	2,568	1,199
0,006	4 — 0,57534	2,510	1,192
0,007	4 — 0,64250	2,461	1,185
0,008	4 — 0,70071	2,418	1,179
0,009	4 — 0,75208	2,380	1,173
0,010	4 — 0,79806	2,347	1,169

t	$M \cdot \pi \frac{K'}{K}$	$\frac{K'}{K}$	$\operatorname{arctg} \frac{K'}{K} = \frac{\gamma(t)}{2}$
0,013	4 — 0,91267	2,263	1,155
0,016	3 — 0,00350	2,196	1,143
0,020	3 — 0,10129	2,125	1,131
0,025	3 — 0,19930	2,053	1,117
0,030	3 — 0,27960	1,994	1,106
0,035	3 — 0,34766	1,944	1,096
0,040	3 — 0,40677	1,901	1,086
0,045	3 — 0,45905	1,862	1,078
0,050	3 — 0,50393	1,829	1,070
0,06	3 — 0,58739	1,768	1,056
0,07	3 — 0,65663	1,717	1,043
0,08	3 — 0,71693	1,673	1,032
0,09	3 — 0,77042	1,734	1,022
0,10	3 — 0,81853	1,599	1,012
0 12	3 — 0,90249	1,537	0,994
0,14	3 — 0,97429	1,485	0,978
0,16	2 — 0,03724	1,438	0,963
0,18	2 — 0,09344	1,397	0,950
0,20	2 — 0,14435	1,360	0,937
0,3	2 — 0,34786	1,211	0,880
0,4	2 — 0,50356	1,097	0,832
0,5	2 — 0,63562	1,000	0,785

Randwerte γ zugeordnet. Bei der Abbildung des Dreiecksrandes auf die reelle Achse geht der Halbkreis $C'' D''$ in die Strecke $C''' D'''$ der Länge 1 über (Abb. 4). Auf der Strecke $t=0$ bis $t=0{,}5$ fällt γ von π bis $\frac{1}{2}\pi$. Nun gehen aber die Punkte t_{III} des Bereiches III durch die Transformation

$$1 - t_{\mathrm{IV}} = t_{\mathrm{III}}$$

aus den Punkten des Bereiches IV hervor. Daraus folgt die Symmetrie der Kurve $\gamma = \gamma(t)$:

$$\gamma(1-t) = \pi - \gamma(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

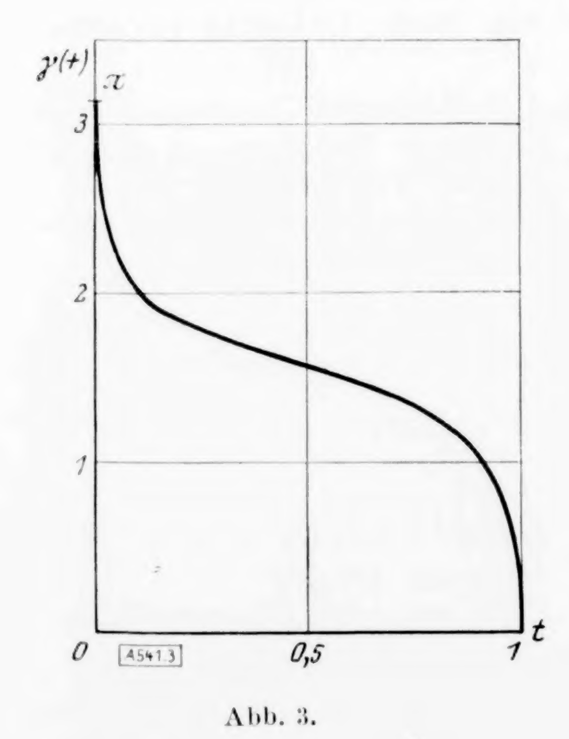
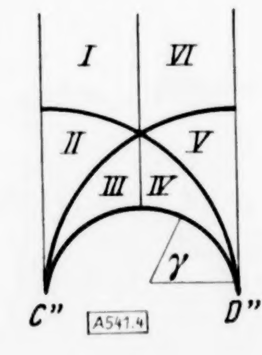


Abb. 3.



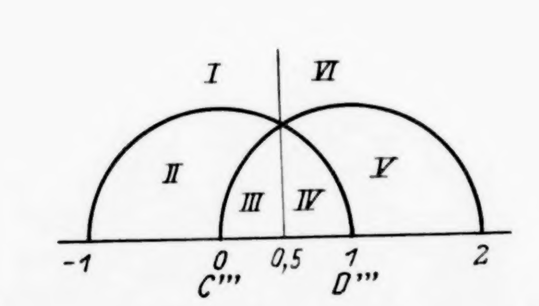


Abb. 4.

2. Berechnung von $\int\limits_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}\,dt$ **für** $0 \leq \lambda \leq 1$. Die punktweise Berechnung von $\gamma(t)$ bietet nun zwei Wege für die Berechnung des Integrals. Einmal kann zwecks graphischer Integration der Integrand $\frac{\gamma(t)}{t-\lambda}$ für ein bestimmtes λ punktweise berechnet werden. Diese Methode wird für $-\infty \leq \lambda \leq 0$ und $1 \leq \lambda \leq \infty$ benutzt.

Es läßt sich aber auch $\gamma = \gamma(t)$ durch eine bequemer zu handhabende Funktion ersetzen. Der komplizierte Aufbau von $\gamma = \gamma(t)$ erfordert zur Approximation ganze rationale Funktionen mit vielen Potenzen, wenn die Annäherung in einem hinlänglich großen Intervall gelten soll. Innerhalb derselben Fehlergrenzen läßt sich im selben Intervall aber auch die Annäherung mit wenigen Sehnen erreichen. Dabei ist als rechnerischer Vorteil bei der späteren Integration noch zu beachten, daß außer $\ln t$ nur t in der ersten Potenz auftritt. Im Intervall $\lambda = 0$ bis $\lambda = 1$ wird die Kurve (Abb. 3) durch ein Sehnenpolygon approximiert und zwar so, daß die Differenz zwischen Kurve und Sehne nie größer als 0,01 wird. Nur im ersten Intervall ($t_1 = 0$ bis $t_2 = 0{,}00001$, $\gamma_1 = 3{,}142$; $\gamma_2 = 2{,}709$) wird der Approximationsfehler gleich $\gamma_1 - \gamma_2 = 0{,}45$ gesetzt. Das verwendete Polygon besteht aus 12 Sehnen, die zu den Intervallen mit den Endpunkten $t = 0$; 0,00001; 0,00005; 0,0001; 0,0005; 0,0015; 0,005; 0,01; 0,025; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5 gehören.

Die Gleichungen der Sehnen sind

I	$y = -43293{,}5775 \cdot t + 3{,}1415926$	$\pm\, 0{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot t$
II	$y = -1323{,}6421 \cdot t + 2{,}72189$	$\pm\, 0{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot t$
III	$y = -538{,}4427 \cdot t + 2{,}68263$	$\pm\, 0{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot t$
IV	$y = -188{,}35807 \cdot t + 2{,}64762$	$\pm\, 0{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot t$
V	$y = -65{,}08284 \cdot t + 2{,}58598$	$\pm\, 0{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot t$
VI	$y = -25{,}53895 \cdot t + 2{,}52667$	$\pm\, 0{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot t$
VII	$y = -12{,}60035 \cdot t + 2{,}46198$	$\pm\, 0{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot t$
VIII	$y = -6{,}73467 \cdot t + 2{,}40332$	$\pm\, 0{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot t$
IX	$y = -3{,}7542 \cdot t + 2{,}32878$	$\pm\, 0{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot t$
X	$y = -2{,}3468 \cdot t + 2{,}25845$	$\pm\, 0{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot t$
XI	$y = -1{,}5018 \cdot t + 2{,}17394$	$\pm\, 0{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot t$
XII	$y = -1{,}0093 \cdot t + 2{,}07545$	$\pm\, 0{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot t$.

Wegen der Symmetrie von $\gamma = \gamma(t)$ braucht die Approximation zunächst nur für das Intervall $t = 0$ bis $t = 0{,}5$ durchgeführt zu werden. Die Symmetrie der Kurve überträgt sich auch auf die approximierenden Sehnen, so daß in Anlehnung an (5) gilt:

$$y(1-t) = \pi - y(t).$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehung läßt sich die gesamte Anzahl der zu integrierenden Gleichungen im Intervall $t = 0$ bis $t = 1$ um die Hälfte vermindern. Die folgende Tabelle (S. 260) gibt als Ergebnis die Abhängigkeit der beiden Funktionen $\int\limits_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}\,dt$ und $e^{-\frac{3}{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}}$ von λ an.

3. Fehlerberechnung. Die angegebenen möglichen Fehler enthalten die bei der numerischen Rechnung auftretenden Fehler neben den Fehlern, die durch die Sehnenapproximation entstehen. Ist der mögliche Fehler nicht besonders erwähnt, so kann die letzte Dezimale höchstens um 5 schwanken.

4. Graphische Integration. Aus später zu erörternden Gründen (S. 259) wird das innere Integral für $\lambda = 0{,}5$; 0,8; 0,9 auch noch auf graphischem Wege bestimmt. Wir zerlegen nämlich

$$\int\limits_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}\,dt = \int\limits_0^1 \frac{\gamma(t)-\gamma(\lambda)}{t-\lambda}\,dt + \int\limits_0^1 \frac{\gamma(\lambda)}{t-\lambda}\,dt.$$

	Aus der Zeichnung folgt durch Auszählung der Fläche:	Durch Rechnung:	
λ	$\int\limits_0^1 \frac{\gamma(t)-\gamma(\lambda)}{t-\lambda}\,dt$	$\int\limits_0^1 \frac{\gamma(\lambda)}{t-\lambda}\,dt$	$\int\limits_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}\,dt$
0,5	$-1{,}040 + 0{,}012$	0,000	$-1{,}040 + 0{,}012$
0,8	$-1{,}178 + 0{,}003$	$-1{,}758$	$-2{,}936 + 0{,}003$
0,9	$-1{,}363 + 0{,}001$	$-2{,}457$	$-3{,}820 + 0{,}001$.

Der angegebene Fehler gestattet in der Zeichnung eine Schwankung der Kurve um $^1/_2$ mm.

III. Berechnung der freien Oberfläche.

Nach der „Abhandlung" (S. 144) ist

$$z - z_C = \frac{g}{2\nu}\int_{\pi}^{\gamma} e^{\tau}\cos\frac{\gamma}{2}\,d\gamma - i\,\frac{g}{2\nu}\int_{\pi}^{\gamma} e^{\tau}\sin\frac{\gamma}{2}\,d\gamma \qquad \gamma \to 0\,.$$

Wir lösen die beiden Integrale durch graphische Integration. Um

$$e^{\tau} = \sqrt{\frac{\lambda - 1}{(\lambda - b)(a - \lambda)\lambda}}\; e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}\,dt}$$

zu bilden, wählen wir willkürlich die Konstanten

$$a = 10\,, \qquad b = 5\,.$$

Damit ist im wesentlichen die Gestalt des Dammes festgelegt. In der folgenden Tabelle S. 260 gibt Spalte (VI) die Werte $\frac{\lambda-1}{(\lambda-5)(10-\lambda)\lambda}$ an. Die Spalte (VII) liefert

$$\sqrt{\frac{\lambda - 1}{(\lambda - 5)(10-\lambda)\lambda}}\cdot e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}\,dt}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\,.$$

Sie setzt sich zusammen nach der Gleichung

$$(\mathrm{VII}) = (\mathrm{III})\cdot(\mathrm{IV})\sqrt{(\mathrm{VI})}\,.$$

In Abb. 5 ist die Abhängigkeit der Funktion $e^{\tau}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$ von γ veranschaulicht.

$e^{\tau}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$ ist durch Spalte VIII bekannt, die sich zusammensetzt nach der Gleichung

$$(\mathrm{VIII}) = (\mathrm{III})\cdot(\mathrm{V})\cdot\sqrt{(\mathrm{VI})}\,.$$

Abb. 6 zeigt den Integranden $e^{\tau}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$ in Abhängigkeit von γ.

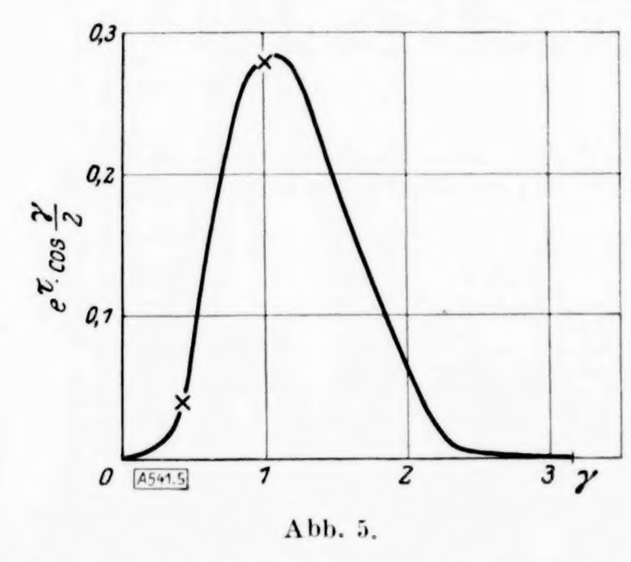


Abb. 5.

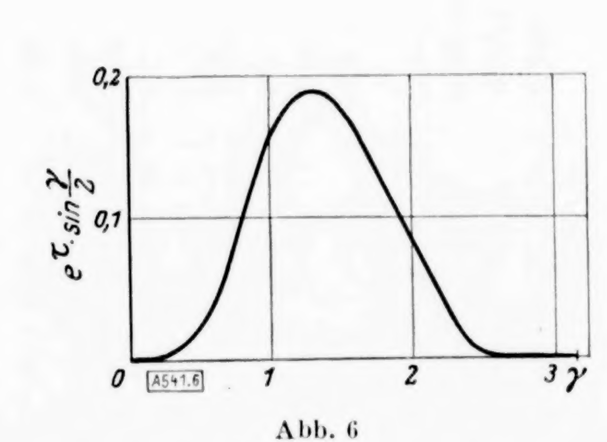


Abb. 6

In den beiden Zeichnungen sind die durch graphische Integration gefundenen Werte des inneren Integrals für $\lambda = 0{,}5;\ 0{,}8;\ 0{,}9$ wegen ihrer Genauigkeit unentbehrlich.

Die graphische Methode liefert nämlich numerische Werte des Integrals für nicht zu singularitätennahe λ müheloser und genauer als die Berechnung des inneren Integrals mit Hilfe der Sehnenapproximation. Für diese λ sind aber die Anforderungen an die Genauigkeit besonders groß, weil an diesen Stellen für $e^{\tau}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$ und $e^{\tau}\sin\frac{\gamma}{2}$ ein Maximum vorliegt. Gerade hier verursacht ein geringes Schwanken für $\int_{\pi}^{\gamma} e^{\tau}\cos\frac{\gamma}{2}\,d\gamma$ und $\int_{\pi}^{\gamma} e^{\tau}\sin\frac{\gamma}{2}\,d\gamma$ einen beträchtlichen Fehler.

Für singularitätennahe λ dagegen verliert die graphische Methode an Einfachheit. Wie aus den Bildern 5 und 6 und aus der Tabelle S. 260 hervorgeht, werden die Kurven aber

λ	γ	I $\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}\,dt$		II $\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}\,dt$		III $e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}\,dt}$		IV $\cos\frac{\gamma}{2}$	V $\sin\frac{\gamma}{2}$	VI $\frac{\lambda-1}{(\lambda-5)(10-\lambda)\lambda}$	VII $e^{\gamma}\cos\frac{\gamma}{2}$	VIII $e^{\gamma}\sin\frac{\gamma}{2}$
0,00001	2,709	26,41 ±	0,27	12,65 ±	0,13	0,000004 ±	0,000001	0,2148	0,9766	1999,96	0,0040	0,0002
0,005	2,399	10,27	0,05	4,91	0,03	0,0073	0,0002	0,3628	0,9319	3,99	0,0053	0,0137
0,01	2,336	8,57	0,03	4,09	0,02	0,0166	0,0003	0,3920	0,9200	1,85	0,0089	0,0208
0,05	2,141	4,72	0,03	2,25	0,02	0,104	0,002	0,4797	0,8776	0,386	0,0311	0,0568
0,10	2,024	3,09	0,02	1,48	0,02	0,227	0,003	0,5302	0,8478	0,1855	0,0519	0,0830
0,15	1,941	2,09	0,04	1,00	0,02	0,368	0,007	0,5649	0,8252	0,1186	0,072	0,105
0,20	1,874	1,49	0,05	0,68	0,02	0,50	0,01	0,5924	0,8075	0,0850	0,086	0,117
0,25	1,815	0,88	0,04	0,42	0,02	0,65	0,02	0,6159	0,7878	0,0647	0,103	0,131
0,30	1,761	0,41	0,05	0,19	0,02	0,82	0,02	0,6368	0,7711	0,0512	0,118	0,143
0,40	1,663	— 0,39	0,04	— 0,13	0,02	1,14	0,03	0,6737	0,7390	0,0339	0,141	0,155
0,45	1,617	— 0,75	0,06	— 0,35	0,03	1,43	0,05	0,6907	0,7231	0,0282	0,166	0,171
0,50	1,571	— 1,05	0,07	— 0,49	0,04	1,64	0,06	0,7089	0,7053	0,0234	0,178	0,177
0,55	1,525	— 1,38	0,06	— 0,65	0,03	1,92	0,07	0,7231	0,6907	0,01945	0,194	0,185
0,60	1,478	— 1,55	0,06	— 0,74	0,02	2,11	0,05	0,7390	0,6737	0,01611	0,195	0,180
0,70	1,380	— 2,25	0,05	— 1,07	0,02	2,93	0,07	0,7711	0,6367	0,01071	0,234	0,192
0,75	1,327	— 2,57	0,04	— 1,22	0,02	3,40	0,08	0,7878	0,6159	0,00847	0,247	0,193
0,80	1,268	— 2,92	0,04	— 1,39	0,02	4,04	0,10	0,8057	0,5924	0,00647	0,262	0,192
0,85	1,200	— 3,36	0,04	— 1,51	0,02	5,00	0,10	0,8252	0,5648	0,00465	0,281	0,192
0,90	1,118	— 3,74	0,04	— 1,83	0,02	6,23	0,13	0,8478	0,5303	0,00298	0,287	0,180
0,95	1,000	— 4,54	0,06	— 2,17	0,03	8,7	0,3	0,8775	0,4796	0,001435	0,291	0,159
0,99	0,806	— 5,87	0,06	— 2,80	0,03	16,5	0,4	0,9200	0,3920	0,000279	0,254	0,108
0,995	0,763	— 6,37	0,06	— 3,04	0,03	21,0	0,5	0,9282	0,3776	0,000139	0,230	0,093
0,9999	0,513	— 8,61	0,07	— 4,11	0,03	60,8	1,8	0,9673	0,2536	0,0000027	0,097	0,025
0,99999	0,433	— 9,75	0,19	— 4,66	0,09	106	20	0,9760	0,2148	0,00000027	0,053	0,012

γ	IX $\int_\gamma^\pi e^{\gamma}\cos\frac{\gamma}{2}\,d\gamma$		X $\int_\gamma^\pi e^{\gamma}\sin\frac{\gamma}{2}\,d\gamma$	
2,5	0,00028		0,00064	
2,4	0,00068		0,00160	
2,3	0,00148		0,00344	
2,2	0,00308		0,00688	
2,1	0,00608 ±	0,00008	0,01236 ±	0,00008
2,0	0,0110	0,0002	0,0201	0,0002
1,9	0,0181	2	0,0301	3
1,8	0,0277	4	0,0423	4
1,7	0,0401	6	0,0568	6
1,6	0,0554	8	0,0734	7
1,5	0,074	0,001	0,0915	8
1,4	0,095	1	0,1105	9
1,3	0,119	2	0,1298	0,001
1,2	0,145	2	0,149	1
1,1	0,174	2	0,167	1
1,0	0,202	2	0,184	1
0,9	0,230	2	0,198	1
0,8	0,256	2	0,211	2
0,7	0,279	2	0,220	2
0,6	0,295	3	0,226	2
0,5	0,307	3	0,230	2
0,4	0,314	4	0,231	2
0,3	0,316	4	0,232	2
0,2	0,316	4	0,232	3
0,1	0,317	4	0,232	3

Die durch graphische Integration entstandenen Werte von $e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}\,dt}$ wurden in den folgenden Zeilen verwendet:

0,50	1,571	— 1,040	0,012	— 0,497	0,006	1,644	0,010	0,7089	0,7053	0,0234	0,178 ± 0,001	0,178 ± 0,001
0,80	1,268	— 2,936	0,003	— 1,401	0,001	4,059	0,004	0,8057	0,5924	0,00647	0,2632 ± 0,0004	0,1932 ± 0,0003
0,90	1,118	— 3,820	0,001	— 1,825	0,002	6,123	0,013	0,8478	0,5303	0,00298	0,2866 ± 0,0006	0,1795 ± 0,0005

sehr wesentlich durch Werte von λ bestimmt, die äußerst dicht bei $\lambda = 1$ oder $\lambda = 0$ liegen. Wegen der Steilheit der Kurven kann hier der mögliche Fehler die Integrale nur wenig beeinflussen.

Durch Auszählung der Fläche werden die Integrale $\int_{\gamma}^{\pi} e^{\tau} \cos \frac{\gamma}{2}\, d\gamma$ (Spalte (IX)) und $\int_{\gamma} e^{\tau} \sin \frac{\gamma}{2}\, d\gamma$ (Spalte (X)) bestimmt. Die den Zahlen angefügte Korrektion läßt die mögliche Schwankung der Kurve zu. Die Kurve, die die freie Oberfläche darstellt, bestimmt sich aus diesen beiden Integralen, die für ein bestimmtes γ die Koordinaten eines Punktes der freien Oberfläche sind.

Die ausgeführten Rechnungen sind zum großen Teil auch für ein anderes Konstantenpaar a und b zu verwenden. Erst Spalte (VI), die wesentlich durch die Konstanten a und b bestimmt wird, und die folgenden zwei Spalten (VII) und (VIII), zu deren Berechnung Spalte (VI) gebraucht wird, müssen für jedes Konstantenpaar a und b neu berechnet werden. Anschließend erfolgt dann die graphische Integration.

IV. Das innere Integral für $1 \leq \lambda \leq 20$; $-20 \leq \lambda \leq 0$.

Für die beiden angegebenen Intervalle wurde das innere Integral auf graphischem Wege bestimmt. Der Integrand $\frac{\gamma(t)}{t-\lambda}$ wurde als Funktion von t für die verschiedenen λ gezeichnet und das Integral durch Auszählung der von der Kurve und den Achsen umgrenzten Fläche erhalten. Das Ergebnis der Integration zeigt die folgende Tabelle. Die angegebenen Fehler berücksichtigen die mögliche Schwankung der gezeichneten Kurven.

λ	$\frac{\gamma(t)}{t-\lambda}$		$-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}\,dt$		$e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}\,dt}$
1,05	− 3,91	± 0,01	+ 1,870	± 0,005	6,488
1,10	− 3,20	0,01	+ 1,529	0,005	4,616
2,00	− 1,04	0,01	0,496	0,005	1,643
3,00	− 0,620	0,008	0,296	0,004	1,344
4,00	− 0,444	0,006	0,212	0,003	1,236
5,00	− 0,343	0,005	0,164	0,003	1,178
6,00	− 0,280	0,005	0,134	0,003	1,143
7,00	− 0,239	0,005	0,114	0,003	1,121
8,00	− 0,208	0,005	0,099	0,003	1,104
12,00	− 0,136	0,0008	0,065	0,0004	1,067
15,00	− 0,108	0,002	0,052	0,001	1,053
20,00	− 0,080	0,0002	0,038	0,0001	1,039
− 0,01	9,02	0,06	− 4,305	0,03	0,0135
− 0,10	4,30	0,02	− 2,053	0,01	0,1283
− 0,20	3,12	0,01	− 1,490	0,005	0,225
− 0,40	2,09	0,01	− 0,999	0,005	0,368
− 0,50	1,84	0,01	− 0,879	0,005	0,415
− 0,70	1,47	0,01	− 0,702	0,005	0,495
− 1,00	1,14	0,01	− 0,545	0,005	0,582
− 2,00	0,65	0,01	− 0,310	0,005	0,733
− 3,00	0,48	0,01	− 0,229	0,005	0,796
− 5,00	0,29	0,01	− 0,138	0,005	0,870
− 8,00	0,187	0,005	− 0,089	0,003	0,914
− 15,00	0,101	0,002	− 0,048	0,001	0,953
− 20,00	0,077	0,002	− 0,037	0,001	0,964

V. Das Integral $\int\sqrt{\frac{\lambda-1}{(\lambda-b)(a-\lambda)\lambda}}\frac{d\lambda}{\lambda}$.

Für große $|\lambda|$ reduziert sich bis auf einige Konstanten der Ausdruck (A) auf Seite 255 auf das oben angegebene Integral, denn für große λ strebt $e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1\frac{\gamma(t)}{t-\lambda}dt}$ gegen 1 (Abhandlung S. 142) und $d(u-iv)$ wird nach Gl. (B) (S. 255) zu $-\frac{g}{i\nu}dq$. Wegen Gl. (4) aber ist $dq=-\frac{1}{\pi i}\frac{1}{\lambda}$ (Abhandlung S. 143). Das Integral läßt sich durch Umformung auf eine gebräuchlichere Form bringen

$$\int_c^d\sqrt{\frac{\lambda-1}{(\lambda-b)(a-\lambda)\lambda}}\frac{d\lambda}{\lambda}=2\sqrt{\frac{1-a}{a^2 b}}\int_{\arcsin\sqrt{\frac{c(a-1)}{a(c-1)}}}^{\arcsin\sqrt{\frac{d(a-1)}{a(d-1)}}}\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

VI. Berechnung der Höhe AB des unteren Wasserstandes.

Es ist zu berechnen („Abhandlung" S. 143)

$$z_A-z_B=C\frac{g}{\nu}\int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}e^{\tau}\,dq.$$

Das Intervall $10\leqq\lambda\leqq\infty$ wird zerlegt. Je nach der Größe von λ werden verschiedene Berechnungsmethoden herangezogen.

1. Das Intervall $10\leqq\lambda\leqq 11$. Für große $|\lambda|$ gilt nach „Abhandlung" (S. 143)

$$\frac{dq}{d\lambda}=-\frac{1}{\pi i}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{2\lambda^2}+R\right).$$

Unter Benutzung der Tafel von Hayashi findet man für $\frac{\Delta q}{\Delta\lambda}$ in der Umgebung von $\lambda=10$ den Wert 0,0335. Für $\lambda=10$ ist $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{2\lambda^2}=0{,}105$. Daraus folgt $\frac{1}{\pi}R\leqq|0{,}0002|$.

Das obige Integral läßt sich also im angegebenen Intervall zerlegen in drei Integrale (unter Weglassung der Konstanten):

$$\text{a)}\int_{10}^{11}e^{\tau}\frac{d\lambda}{\lambda},\qquad \text{b)}\int_{10}^{11}e^{\tau}\frac{d\lambda}{\lambda^2},\qquad \text{c)}\ R\int_{10}^{11}e^{\tau}\,d\lambda.$$

$$\underline{\text{a)}\int_{10}^{11}e^{\tau}\frac{d\lambda}{\lambda}.}$$

e^{τ} wird in zwei Faktoren zerlegt

$$\left(\frac{1}{\sqrt{(\lambda-5)(\lambda-10)}}\right)\left(\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\cdot e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1\frac{\gamma(t)}{t-\lambda}dt}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\quad(6).$$

Der zweite Faktor, noch durch λ dividiert, erweist sich in der Umgebung von $\lambda=10$ nahezu als Konstante im Vergleich zum ersten Faktor. Für $10\leqq\lambda\leqq 11$ kann also

$$\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\,e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1\frac{\gamma(t)}{t-\lambda}dt}$$

durch $0{,}0972\pm 0{,}0055$ ersetzt werden.

Der erste Faktor in (6) liefert das Integral

$$\int_{10}^{11}\frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda-5)(\lambda-10)}}=0{,}8674.$$

Mithin ist

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{10}^{11} e^{\tau}\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{i}{\pi}\,0{,}8674\,(0{,}0972 \pm 0{,}005) = \underline{0{,}0268\, i \pm 0{,}0016\, i}\,.$$

$$\underline{\text{b)} \int_{10}^{11} e^{\tau}\frac{d\lambda}{\lambda^2}\,.}$$

Wir verfahren hier genau wie beim letzten Abschnitt und setzen

$$\frac{1}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\; e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}\,dt} = 0{,}0046 \pm 0{,}0005\,.$$

Mithin ist

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{10}^{11} e^{\tau}\frac{d\lambda}{2\lambda^2} = 0{,}8674\,(0{,}0046 \pm 0{,}0005)\, i = \underline{0{,}00128\, i \pm 0{,}00015\, i}\,.$$

$$\underline{\text{c)}\; R\int_{10}^{11} e^{\tau}\, d\lambda\,.}$$

Wir setzen

$$\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\; e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}\,dt} = 1{,}019 \pm 0{,}001$$

für $10 \leqq \lambda \leqq 11$ und erhalten, da $\frac{1}{\pi}\cdot R \leqq |0{,}0002|$

$$\frac{i}{\pi}R\int_{10}^{11} e^{\tau}\, d\lambda = 0{,}867\,(1{,}019 \pm 0{,}001)\,0{,}0002\, i = \underline{0{,}000177\, i \pm 0{,}000002\, i}\,.$$

Die Zusammenfassung der drei Integrale führt zu

$$z_{11} - z_{10} = C\frac{g}{\nu}\int_{10}^{11} e^{\tau}\left(\frac{i}{\pi\lambda} + \frac{i}{2\pi\lambda^2} + \frac{i}{\pi}R\right)d\lambda = \underline{0{,}027\, i \pm 0{,}002\, i} \quad . \; . \; . \quad (7).$$

2. Das Intervall $11 \leqq \lambda \leqq 20$. Die Integration wird für dieses Integral graphisch ausgeführt. In der Tafel von Hayashi ist β in Abhängigkeit von k^2 tabuliert, wobei nach Seite 256

$$\frac{1}{k'^2} = 1 - \frac{1}{k^2} = \lambda\,.$$

Damit ist die Beziehung zwischen β und λ bekannt und in der folgenden Tabelle angegeben.

k'^2	λ	β	k'^2	λ	β
0,1	10	1,5988	0,070	14,286	1,7175
0,05	20	1,8294	0,065	15,384	1,7420
0,095	10,526	1,6161	0,060	16,667	1,7683
0,090	11,111	1,6341	0,055	18,018	1,7968
0,080	12,500	1,6733	0,050	20	1,8294
0,075	13,333	1,6947			

Die folgende Tabelle zeigt die Art der Berechnung des Integranden $\sqrt{\frac{\lambda-1}{(\lambda-5)(\lambda-10)\lambda}}\cdot e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}\,dt}$.

λ	$\sqrt{\frac{\lambda-1}{(\lambda-5)(\lambda-10)\lambda}}$	$e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}dt}$	$\sqrt{\frac{\lambda-1}{(\lambda-5)(\lambda-10)\lambda}} \cdot e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}dt}$
11	0,38925	1,075	0,4180
12	0,25588	1,067	0,2727
13	0,19612	1,062	0,2085
14	0,16060	1,0750	0,1698
15	0,13662	1,053	0,1439
16	0,11920	1,050	0,1251
17	0,10585	1,047	0,1108
18	0,09529	1,044	0,0995
19	0,08671	1,041	0,0903
20	0,07958	1,039	0,0827

Abb. 7.

In Abb. 7 ist der Integrand als Funktion von β gezeichnet. Die Auszählung der Fläche ergibt

$$i\int_{11}^{20} e^{\tau}\,d\beta = 0{,}035\,i \pm 0{,}001\,i \qquad (8),$$

wenn eine mögliche Schwankung der Kurve berücksichtigt wird.

3. Das Intervall $20 \leq \lambda \leq \infty$. Wir setzen $e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}dt} = 1 + 0{,}04$ für $20 \leq \lambda \leq \infty$, denn die Potenz strebt nach 1 für $\lambda \to \infty$ und hat für $\lambda = 20$ den Wert 1,04. Demnach reduziert sich $\int_{\lambda=20}^{\infty} e^{\tau}\,d\,q$ auf

$$-(1+0{,}03)\,(1+0{,}04)\,\frac{1}{\pi i}\int_{20}^{\infty}\sqrt{\frac{\lambda-1}{(\lambda-b)(\lambda-a)\lambda}}\,\frac{d\lambda}{\lambda},$$

wenn $d\,q = \frac{d\lambda}{\pi i \lambda}(1+0{,}03)$ angenommen wird. Man muß bei dieser Annahme bedenken, daß

$$d\,q = -\frac{1}{\pi i}\frac{d\lambda}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2\lambda} - \frac{13}{64\lambda^2} \pm \ldots\right)$$

und daß für $20 \leq \lambda \leq \infty$ die Klammer höchstens den Wert $1 + 0{,}03$ annimmt. Das Integral

$$\int_{\lambda=c=20}^{\lambda=d=\infty} \frac{1}{\sqrt{(\lambda-5)(\lambda-10)\lambda}}\,d\lambda$$

läßt sich nach einer auf S. 262 angegebenen Umformung berechnen. Es ergibt sich

$$\int_{\lambda=20}^{\infty} e^{\tau}\,d\,q = (1+0{,}03)\,(1+0{,}04)\,\frac{i}{\pi}\,0{,}0601 = 0{,}0191\,i \pm 0{,}0014\,i \qquad (9).$$

Durch Addition der Teilintegrale (7), (8), (9) folgt

$$\int_{\lambda=10}^{\infty} e^{\tau}\,d\,q = 0{,}081\,i \pm 0{,}005\,i = A\,B.$$

VII. Berechnung der Sickerstrecke BC.

Zu berechnen ist $\int_{\lambda=0}^{-\infty} e^{\tau}\,d\,q = i\int_{\lambda=0}^{-\infty} e^{\tau}\,d\beta$.

Wir zerlegen das Integral in zwei Teile.

1. Das Intervall $-20 \leq \lambda \leq 0$. Wir verfahren hier wieder wie beim Intervall $11 \leq \lambda \leq 20$, Seite 263. In Abb. 8 ist der Integrand

$$\sqrt{\frac{\lambda-1}{(\lambda-5)(\lambda-10)\lambda}} \cdot e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}dt}$$

als Funktion von β gezeichnet. Die Art der Berechnung des Integranden ergibt sich aus der folgenden Tabelle.

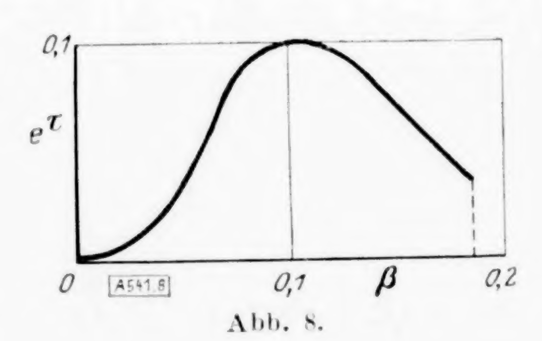


Abb. 8.

λ	β	$\frac{\lambda-1}{(\lambda-5)(\lambda-10)\lambda}=D$	$e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}dt}$	$\sqrt{D}\cdot e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}dt}$
— 0,01	0,426	2,011	0,0135	0,0272
— 0,1	0,611	0,214	0,128	0,0547
— 0,2	0,703	0,1133	0,225	0,0749
— 0,4	0,813	0,0624	0,368	0,0921
— 0,5	0,857	0,0519	0,415	0,0945
— 0,7	0,920	0,0398	0,496	0,0990
— 1,0	1,000	0,0303	0,582	0,1014
— 2,0	1,165	0,01786	0,733	0,0980
— 3,0	1,279	0,01282	0,796	0,0902
— 5,0	1,420	0,00800	0,871	0,0779
— 8,0	1,566	0,00480	0,914	0,0633
— 15,0	1,760	0,00213	0,953	0,0440
— 20,0	1,845	0,00140	0,964	0,0361

Die Beziehung zwischen λ und β in den beiden ersten Spalten liefert die folgende Tabelle:

k^2	λ	β	k^2	λ	β
0,01	— 0,010	0,426	0,65	— 1,860	1,151
0,04	— 0,0416	0,526	0,70	— 2,335	1,210
0,039	— 0,0406	0,524	0,75	— 3,000	1,279
0,038	— 0,0395	0,521	0,80	— 4,000	1,360
0,1	— 0,111	0,626	0,832	— 5,01	1,420
			0,831	— 4,98	1,419
0,15	— 0,1765	0,684			
0,20	— 0,2500	0,735	0,85	— 5,665	1,461
0,25	— 0,3332	0,781	0,90	— 9,000	1,597
0,30	— 0,428	0,825	0,95	— 19,000	1,821
0,35	— 0,538	0,872			
0,40	— 0,666	0,911			
0,45	— 0,818	0,955			
0,50	— 1,000	1,000			
0,55	— 1,221	1,045			
0,60	— 1,500	1,097			

Aus Bild 8 folgt $i\int\limits_{\lambda=0}^{-20} e^{\tau}\,d\beta = 0{,}109 \pm 0{,}002$.

2. Das Intervall $-\infty \leq \lambda \leq 20$. Hier gelten dieselben Betrachtungen wie bei VI, 3; S. 264.

$e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t-\lambda}dt}$ wird jetzt gleich $1-0{,}04$ gesetzt. Dann ist

$$i\int\limits_{\lambda=-20}^{-\infty} e^{\tau}\,d\beta = (1+0{,}03)(1-0{,}04)\,\frac{i}{\pi}\int\limits_{-20}^{-\infty}\sqrt{\frac{\lambda-1}{(\lambda-5)(\lambda-10)\lambda}}\,d\lambda$$

$$= (1+0{,}03)(1-0{,}04)\,\frac{i}{\pi}\,0{,}0445 = 0{,}0148\,i - 0{,}0002\,i\,.$$

Durch Addition der beiden Teilintegrale folgt

$$i\int\limits_{\lambda=0}^{-\infty} e^{\tau}\,d\beta = 0{,}124\,i \pm 0{,}002\,i = BC.$$

AB: Unterwasser
BC: Sickerstrecke
CD: freie Oberfläche
DE: Oberwasser
EA: undurchlässige Schicht

Abb. 9.

VII. Schlußergebnis.

Aus BC, AB, DC ergibt sich Abb. 9. Für einen Spezialfall, bei dem zwei Konstanten ($a=10$; $b=5$) willkürlich gewählt wurden, ist nun die wirkliche Gestalt bestimmt worden. Die drei Größen BC, AB und DC sind dabei bis auf den Faktor $C\frac{g}{\nu}$ bekannt. Durch Wahl der Konstanten C erhält man also die obenstehend angegebene Abbildung in der gewünschten Größe. Die Längen von BC und AB sind auf S. 265 und 264 angegeben. Die freie Oberfläche DC bilden bekannte Punkte, deren Koordinaten durch die Spalten (IX) (Abszissen) und (X) (Ordinaten) bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ bestimmt sind.

On the Transition Curve Considering the Effect of Variation of the Train Speed.

By *Y. Tanaka* in Tokio.

Zusammenfassung. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Aufgabe, die Übergangskurve aus der Geraden in eine Krümmung für ein Eisenbahngleis unter den folgenden Voraussetzungen zu bestimmen. Es wird angenommen, daß die Zuggeschwindigkeit von einem höheren Werte (in der Geraden) zu einem niedrigeren Werte (in der Krümmung) linear mit der Bogenlänge abnimmt, und daß gleichzeitig die Überhöhung der äußeren Schiene linear mit der Bogenlänge zunimmt. Dann liefert die Forderung, daß die Gleise keinen seitlichen Schub erfahren sollen, eine Differentialgleichung für die Übergangskurve, welche sich integrieren läßt, wenn man annimmt, daß (bei Einführung eines geeigneten Koordinatensystems) die Krümmung der Übergangskurve durch den zweiten Differentialquotienten ersetzt werden kann.

I. Introductory. The object of the present article is to submit a mathematical solution of a new transition curve, considering the effect of the linear variation of the train speed.

We know indeed that the cubic parabola is the theoretical transition curve so far as the train speed is uniform and the outer rail has a linear gradient over the same curve, while after my opinion, it might not be of no use to investigate the effect of the speed variation to the form of the transition curve, and we should like point out that by the present consideration we can get one of the more general solutions of the transition curve, which might bring something new to the practical applications.

II. Fundamental Equations. In the first place, let us assume that the speed variation of an axle with a pair of wheels as shown in Fig. 1. Then, we may write the speed of the axle runing over the curve as below.

$$v = v_1 - a\,x\,, \quad \text{for } 0 \leq x \leq l \qquad (1)$$

where $$a = \frac{v_1 - v_0}{l}\,.$$

In this expression, we may note that "a" is positive in case 1, while it is negative in case 2, but it makes no difference in the following mathematical operations.

In the next, we shall make two usual assumptions in regard to the gradient of the outer rail and the amount of the superelevation as shown in Fig. 2 and Fig. 3, whence we may write the following equations.

$$k = \frac{k_0}{l}\,x\,, \quad \text{for } 0 \leq x \leq l \qquad (2),$$

where k = superelevation of the outer rail, l = length of the transition curve, k_0 = superelevation on the circular curve.

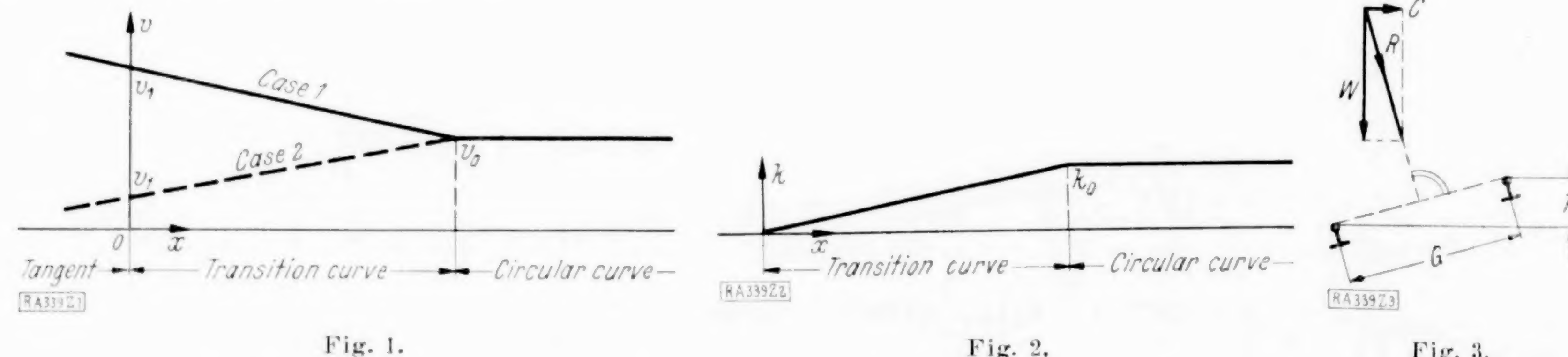


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

And as the superelevation of the outer rail at any point is to be assumed as to make the direction of the resultant force "R" normal to the track surface as shown in Fig. 3, we may write without any practical error as

$$k = \frac{G}{W} \cdot C \qquad (3),$$

where G = gauge of track, W = total weight under consideration, C = centrifugal force. And as the centrifugal force $C = \frac{m\,v^2}{\varrho}$, in which m = mass and ϱ = radius of curvature; we may rewrite (3) as

$$k = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{\varrho}\,, \quad g = \text{gravity acceleration} \qquad (4).$$

Therefore, putting (1) into (4), we get

$$k = \frac{G}{g} \cdot \frac{(v_1 - a\,x)^2}{\varrho} \qquad (5).$$

In the present case, as we may generally put $\frac{1}{\varrho} = \frac{d y^2}{d x^2}$, from (2) and (5) we shall have

$$\frac{d y^2}{d x^2} = \frac{g k_0}{G l} \cdot \frac{x}{(v_1 - a x)^2}, \quad \text{or} \quad \underline{\frac{d y^2}{d x^2} = K \frac{x}{(1 - \alpha x)^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

where $\alpha = \frac{a}{v_1} = \left(1 - \frac{v_0}{v_1}\right) \frac{1}{l}$ and $K = \frac{g k_0}{G l v_1^2}$.

This is the fundamental equation for the present problem, and the ordinates of the new curve will be given by the solution of this equation.

III. Solutions of the Fundamental Equation. By integrating the equation (6), we get

$$\underline{\frac{d y}{d x} = \frac{K}{\alpha^2} \left\{ \ln (1 - \alpha x) + \frac{1}{1 - \alpha x} + c_1 \right\}_{c_1 = -1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

in which the integration constant c_1 will be given as $c_1 = -1$ by the condition, $\frac{d y}{d x} = 0$ at $x = 0$.

And by integrating once more, we have

$$y = -\frac{K}{\alpha^3} \left\{ (2 - \alpha x) \ln (1 - \alpha x) - 2 (1 - \alpha x) + c_2 \right\},$$

where as $y = 0$ at $x = 0$, we get $c_2 = 2$ or

$$\underline{y = \frac{K}{\alpha^3} \left\{ -(2 - \alpha x) \ln (1 - \alpha x) - 2 \alpha x \right\}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

where we know that $K = \frac{g k_0}{G l v_1^2}$ and $\alpha = \left(1 - \frac{v_0}{v_1}\right) \frac{1}{l}$.

This is the equation of the new transition curve and its tangent will be given by equation (7).

In the foregoing solution we have made considerations only for a single axle for the sake of simplicity, while some practical cases as for single car operation etc. will be also covered by the same assumption.

In the present, it will not be needless to note that, if we put $\alpha = 0$ after the expansion of the equation (8), we get the following expression of a cubic parabola,

$$y = \frac{1}{6} K x^3.$$

And in this cubic parabola, K is a function of v_1 and not of v_0, therefore, if we should like calculate the curve for v_0, we have to rewrite this as

$$y = \frac{1}{6} K \frac{v_1^2}{v_0^2} x^3.$$

IV. Numerical Example. To find the numerical ordinates of the new transition curve of equation (8) by the following data:

$$v_0 = 40 \text{ km/hr}, \quad v_1 = 50 \text{ km/hr} = 50\,000/3600 \text{ m/sec},$$
$$l = 40 \text{ m}, \quad G = 1.067 \text{ m and } k_0 = 44.8 \text{ mm} = 0.0448 \text{ m}.$$

In the present case, we have

$$K = \frac{g k_0}{G l v_1^2} = 0.0000533, \qquad \alpha = \left(1 - \frac{v_0}{v_1}\right) \frac{1}{l} = \frac{1}{200 \text{ m}},$$

and we shall have the following results.

x (m)	$-(2 - \alpha x) \ln (1 - \alpha x)$	$-2 \alpha x$	y (m)
5	0.0500027	−0.05	0.001
10	0.1000219	−0.10	0.009
15	0.1500761	−0.15	0.032
20	0.2001850	−0.20	0.079
25	0.2503712	−0.25	0.158
30	0.3006602	−0.30	0.284
35	0.3510789	−0.35	0.459
40	0.4016583	−0.40	0.706.

The max. ordinate of the new curve given by the foregoing example are about 79.7 % of that given by the usual curve $y = \frac{1}{6} K \frac{v_1^2}{v_0^2} x^3$. The tangent angle at the end of the new curve for this case is 3° 17′ and that of the usual curve is 3° 47′, so that the former is about 86 % of the latter in this case.

Die Knickfestigkeit rechteckiger Platten.

Von *O. H. Faxén* in Göteborg (Schweden).

1. Einleitung. Für die Berechnung der größtmöglichen Belastung, welche rechteckige Platten ohne Gefahr für Ausknickung tragen können, gibt es verschiedene neue Methoden, die aber alle zu nicht miteinander übereinstimmenden Ergebnissen führen. Da keine der numerischen Methoden streng bewiesen wurde, habe ich es unternommen, nachzuprüfen, welche Methoden anscheinend richtig und welche unrichtig sind. Die Ergebnisse sind in Kapitel III zusammengefaßt.

Vom rein mathematischen Standpunkte aus genauere Lösungen des Problems kann man allerdings leicht finden. Da sich diese aber, wie ich anfangs glaubte, für numerische Rechnungen nicht eignen, so sollen sie diesmal des mangelnden Platzes wegen unerwähnt bleiben.

Die Schwierigkeit des Problemes hängt davon ab, wie die Ränder der Platte befestigt sind. Wenn zwei parallele Ränder gestützt sind, ist die genaue Lösung einfach, sei es, daß die übrigen Ränder frei, gestützt, eingeklemmt oder elastisch gelagert sind (Bryan, Reißner, Timoshenko usw.).

Um die Sachlage in einem Falle zu studieren, wenn die genaue Lösung kompliziert ist, wollen wir im folgenden das Beispiel behandeln, wo alle Ränder eingeklemmt sind.

Für ein solches Problem wurde meistens das Ritzsche Verfahren angewandt. Dieses Verfahren besteht bekanntlich darin, daß man für die Form der beginnenden Ausbeulung der Platte einen mathematischen Ausdruck wählt, der die Randbedingungen vollkommen und die Differentialgleichung der Platte so genau erfüllt, wie dies mit einem leichthantierlichen Ausdruck möglich ist. Man arbeitet dann allerdings nicht mit der Differentialgleichung selbst, sondern mit einem entsprechenden Minimumprinzip. Der Erfolg hängt davon ab, ob der erwählte Ausdruck gut gewählt ist, ob man also betreffs der Form des Ausdruckes eine glückliche Vermutung gemacht hat.

Einen anderen Weg hat K. Sezawa[1]) betreten, indem er den Ausdruck so wählte, daß die Differentialgleichung und einige Randbedingungen genau erfüllt wurden. Der Ausdruck enthält einige Konstanten, die so bestimmt werden können, daß die noch übrigen Randbedingungen in zweckmäßig gewählten Punkten der Ränder genau erfüllt werden. Es zeigte sich dann, daß diese Randbedingungen überall ziemlich genau erfüllt wurden, und daß man so eine für technische Zwecke recht brauchbare Methode für numerische Rechnungen erhält. In Vergleich mit der Ritzschen hat diese Methode den Vorteil, daß man beim Auffinden der zweckmäßigsten Ausdrücke nicht auf eine glückliche Vermutung angewiesen ist, sondern daß diese sich bei der Auflösung der Differentialgleichung darbieten.

G. I. Taylor[2]) ergänzte den Ausdruck von Sezawa zu unendlichen Reihen mit unendlich vielen Konstanten und zeigte an einem Beispiel durch numerische Rechnungen, wie man einen guten und anscheinend richtigen Wert für die höchstmögliche Belastung erhalten kann, welche quadratische Platten ohne Gefahr für Ausknickung tragen können.

Wenn dieser richtig ist, sollte also die Taylorsche Methode die Lösung eines anerkannt schwierigen mathematischen Problems ermöglichen, eine Lösung, die allerdings nur vom technischen Standpunkte befriedigend ist. Zur Nachprüfung seiner Ergebnisse soll seine Methode im folgenden abgeändert und auf verschiedene Probleme angewandt werden. Es wird sich zeigen, daß die auf verschiedenen Wegen erhaltenen numerischen Ergebnisse miteinander übereinstimmen. Der Verfasser beabsichtigt, die Untersuchungen fortzusetzen.

Die Rechenmethoden werden in Kapitel I und II angegeben. Der größte Teil der numerischen Ergebnisse ist in Kapitel III zusammengestellt.

Durch die Unterstützung des Chalmerschen Forschungsfonds ist die vorliegende Untersuchung ermöglicht.

Kapitel I.

Die Differentialgleichung $\Delta\Delta w + \lambda^2 \Delta w = 0$.

§ 1. Darstellung der Funktion w durch trigonometrische Reihen. Δ bedeutet im folgenden den Differentialoperator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

[1]) ZAMM, S. 227 bis 229, 1932. Vgl. auch Nadais Dissertation, die Verf. leider nicht gesehen hat. Ferner Inglis: Inst. Naval Architects, 1925, wo weitere Literaturangaben zu finden sind.

[2]) ZAMM, S. 147 bis 152, 1933.

Die Differentialgleichung der Überschrift lautet also in ausführlicherer Schreibweise

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\lambda^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0 \quad \ldots \quad (1).$$

λ ist eine Konstante.

Jede Lösung dieser Differentialgleichung läßt sich in eine Summe von zwei Funktionen

$$w=u+v \quad \ldots \quad (2)$$

aufspalten, so daß u und v Lösungen der Differentialgleichungen $\Delta u=0$, $\Delta v+\lambda^2 v=0$ sind, und zwar sieht man leicht, daß

$$u=w+\frac{1}{\lambda^2}\Delta w, \qquad v=-\frac{1}{\lambda^2}\Delta w \quad \ldots \quad (3)$$

ist.

Damit die Formeln nicht unnötig lang ausfallen, wird vorausgesetzt, daß $w(x, y)$ eine gerade Funktion sowohl in bezug auf x wie in bezug auf y sei. Für jeden Wert von x und y gilt also

$$w(x,y)=w(-x,y)=w(x,-y)=w(-x,-y).$$

Ähnliche Formeln gelten dann auch für $u(x,y)$ und $v(x,y)$.

Da u die Differentialgleichung $\Delta u=0$ erfüllt, d. h. eine harmonische Funktion ist, liegt der Gedanke nahe, diese Funktion als eine trigonometrische Reihe zu schreiben.

Wir machen den folgenden Ansatz, durch den jede im Bereich

$$-\pi<x<\pi, \qquad -\pi<y<\pi \quad \ldots \quad (4)$$

reguläre Lösung der Gleichung $\Delta u=0$ dargestellt werden kann:

$$u(x,y)=C+a_0(x^2-y^2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cosh n x\cos n y+b_n\cos n x\cosh n y}{n\sinh n\pi} \quad . \quad (5).$$

Ebenso gilt: Jede im Bereiche (4) reguläre Lösung der Differentialgleichung $\Delta v+\lambda^2 v=0$ kann so

$$\left.\begin{aligned} v(x,y)&=A_0\cos\lambda x+B_0\cos\lambda y\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n\cosh\left(x\sqrt{n^2-\lambda^2}\right)\cos n y+B_n\cos n x\cosh\left(y\sqrt{n^2-\lambda^2}\right)}{\sqrt{n^2-\lambda^2}\,\sinh\left(\pi\sqrt{n^2-\lambda^2}\right)}\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

geschrieben werden.

Da die Funktion w nach (2) eine Summe einer Funktion u und einer Funktion v mit der eben angegebenen Eigenschaft ist, haben wir die allgemeine Form der Lösung der in der Kapitelüberschrift stehenden Differentialgleichung (1) gefunden.

Das Ergebnis ist eine alternative Form zu der von Taylor gegebenen Lösung derselben Differentialgleichung.

§ 2. Das Eigenwertproblem der Differentialgleichung (1). Es wird eine im Inneren des Gebietes (4) reguläre Lösung $w(x,y)$ der Differentialgleichung (1) gesucht. $w(x,y)$ soll ferner die Randbedingungen

$$w(\pm\pi,y)=0, \qquad w(x,\pm\pi)=0 \quad \ldots \quad (7),$$

$$w_x(\pm\pi,y)=0 \quad \ldots \quad (8),$$

$$w_y(x,\pm\pi)=0 \quad \ldots \quad (9),$$

$$w_x=\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad w_y=\frac{\partial w}{\partial y}$$

erfüllen.

Dieses Problem besitzt nur für einzelne Werte von λ, welche man die Eigenwerte nennt, eine oder mehrere Lösungen, die Eigenfunktionen. Wir wollen diese zu finden versuchen.

Nach der Gl. (2) kann man w in eine Summe $u+v$ aufspalten, wobei u und v die in dem vorangehenden Paragraphen angegebenen Eigenschaften haben. Wie die Funktionen u und v sich am Rande verhalten, wissen wir aber nicht. Es bleibt also eine durch die folgenden Rechnungen zu beweisende Annahme, daß u und v von der Form (5) und (6) sind, und zwar wird dieser Beweis diesmal nicht vollständig durchgeführt werden.

Die Koeffizienten der Reihen (5) und (6) und die Konstante λ sollen so bestimmt werden, daß die Randbedingungen (7), (8) und (9) erfüllt sind. Die Randbedingungen (8) und (9) erfordern, daß

$$2\pi a_0 = \lambda A_0 \sin\lambda\pi = -\lambda B_0 \sin\lambda\pi, \qquad a_n = -A_n,\ b_n = -B_n$$

ist. Die Randbedingung (7) gibt zwei Gleichungen, welche zur Bestimmung der Koeffizienten dienen. Um möglichst kurze Formeln zu erhalten, beschränken wir uns ferner darauf, nur solche Funktionen u und v zu suchen, welche unverändert bleiben, wenn x und y vertauscht werden, d. h. wir suchen nur solche Lösungen, in denen $u(x,y) = u(y,x)$, $v(x,y) = v(y,x)$ ist. Dann ist

$$u(x,y) = C + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\cosh nx \cos ny + \cos nx \cosh ny}{n \sinh n\pi} \quad \ldots\ldots \quad (5'),$$

$$v(x,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\cosh(x\sqrt{n^2-\lambda^2}) \cos ny + \cos nx \cosh(y\sqrt{n^2-\lambda^2})}{\sqrt{n^2-\lambda^2} \sinh(\pi\sqrt{n^2-\lambda^2})} \quad . \quad (6').$$

Setzt man diese Reihen in die Randbedingung (7) ein, so erhält man zwei Gleichungen, welche mit der folgenden gleichbedeutend sind

$$\left.\begin{aligned} 0 = C + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Bigg[& \frac{(-)^n \cosh nx + \cos nx \cosh n\pi}{n \sinh n\pi} \\ & - \frac{(-)^n \cosh(x\sqrt{n^2-\lambda^2}) + \cos nx \cosh(\pi\sqrt{n^2-\lambda^2})}{\sqrt{n^2-\lambda^2}\sinh(\pi\sqrt{n^2-\lambda^2})} \Bigg] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10).$$

Diese Gleichung muß für jeden Wert von x erfüllt sein. Jedes Glied kann nicht gleich Null sein, denn dann wäre $\lambda = 0$, $u = v = w = 0$. Da die Funktion $w(x,y)$ nicht überall gleich Null sein soll, muß also λ von Null verschieden sein. Man soll also diejenigen Werte von λ aufsuchen, für welche die Gl. (10) erfüllt sein kann, ohne daß die Zahlen C, a_1, a_2, a_3, ... alle gleich Null sind. Diese Werte von λ sind die gesuchten Eigenwerte des am Anfang dieses Paragraphen gestellten Problems.

Um die Eigenwerte numerisch zu bestimmen, kann man drei naheliegende Wege einschlagen.

Der eine ist eine Verallgemeinerung von Sezawas Methode. Man berücksichtigt nur eine endliche Anzahl Glieder der Reihe in (10) und bestimmt λ so, daß die Gl. (10) für möglichst viele zweckmäßig gewählte Werte von x genau erfüllt wird.

Die zweite, der Taylorschen nachgebildete, Methode ist, die rechte Seite der Gl. (10) mit $\cos mx$ zu multiplizieren und von $-\pi$ zu $+\pi$ zu integrieren. Indem man m der Reihe nach gleich 0, 1, 2, 3, ... setzt, erhält man eine unendliche Anzahl von Gleichungen für die Bestimmung von C, a_1, a_2, ... nämlich:

$$0 = \pi C + \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n+1} a_n}{n^2(n^2-\lambda^2)} \quad \ldots\ldots \quad (11),$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} a_n \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \quad \ldots\ldots \quad (12),$$

worin

$$c_{mn} = \frac{(-)^{n+m+1}}{(m^2+n^2)(m^2+n^2-\lambda^2)} \qquad (m \neq n) \quad \ldots\ldots \quad (13),$$

$$c_{mm} = \frac{\pi}{2\lambda^2}\left[\frac{\coth m\pi}{m} - \frac{\coth(\pi\sqrt{m^2-\lambda^2})}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}\right] - \frac{1}{2m^2(2m^2-\lambda^2)} \quad \ldots \quad (14)$$

ist. Gelingt es, aus den Gl. (12) die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, ... zu bestimmen, so erhält man C aus der Gl. (11). Der nächste Paragraph enthält unsere Methode, eine für praktische Zwecke hinreichend genaue Lösung der Gl. (12) zu finden.

§ 3. Die numerische Berechnung der Eigenwerte. Um die Eigenwerte, d. h. diejenigen Werte von λ, für welche die Gl. (12) nicht verschwindende Lösungen a_1, a_2, a_3, ... haben, zu suchen, wird man zunächst diejenigen λ-Werte aufsuchen, für welche das entsprechende endliche Gleichungssystem

$$0 = \sum_{n=1}^{N} c_{mn} a_n \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots, N) \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

nicht verschwindende Lösungen besitzt. Falls nun diese λ-Werte Grenzwerte zustreben, wenn N ins unendliche wächst, wird man erwarten, daß diese Grenzwerte die Eigenwerte sind.

Aus numerischen Rechnungen erhielt G. I. Taylor[3]) den Eindruck, daß es sich wirklich so verhielte. Er hat die Rechnungen anders gemacht und hat anstatt (12) ein anderes Gleichungssystem erhalten. Er suchte den kleinsten λ-Wert auf, für welchen das entsprechende System von N Gleichungen mit N unbekannten Lösungen hat. Er fand, daß sich bei wachsendem N λ rasch einen Grenzwert anzunähern schien.

Unsere Rechnungen sind, wie gesagt, anders als bei Taylor geführt. Wir können daher sein Ergebnis prüfen. Zu dem Zwecke untersuchen wir erstens, ob der kleinste λ-Wert auch hier bei wachsendem N einem Grenzwert zustrebt. Wenn es sich so verhält, wollen wir zweitens prüfen, ob dieser Grenzwert mit Taylors Ergebnis übereinstimmt.

Ingenieur Å. Anderfeldt hat numerische Rechnungen ausgeführt, deren Ergebnisse in der folgenden Tafel zusammengestellt sind:

λ^2	$1000\,D_1$	$1000\,D_2$	$10000\,D_3$	$10000\,D_4$	$100000\,D_5$
1,3	— 167,28	— 28,00	— 973	— 14	— 9
1,323	1,857	— 2,678	— 10,85	— 1,55	— 1.148
1,325	15,588	— 0,6099	— 3,447	— 0,5128	— 0,3462
1,328	36,97	2,61	8,1	2,5	7,61
$\lambda^2 =$	1,3228	1.3255	1,3259	1,3252	1,3252

Die Bedeutung von D_N ist die Determinante der Gl. (15), d. i.

$$D_N = \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{1N} \\ c_{21}, & c_{22}, & \ldots, & c_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{N1}, & c_{N2}, & \ldots, & c_{NN} \end{vmatrix}.$$

Der kleinste Wert von λ^2 wird ausgewählt, für welchen diese Determinante gleich Null wird, denn für diesen λ^2-Wert besitzen die Gl. (15) die gewünschte Lösung. Aus jeder Vertikalreihe der Tafel kann man durch graphische Interpolation den Wert von λ^2 für $N = 1, 2, 3, 4$ und 5 berechnen. Dieser ist in der letzten Horizontalreihe der Tafel angegeben. Man wird zunächst geneigt sein zu erwarten, daß eine nachfolgende Vertikalreihe immer genauere Werte als eine vorangehende ergeben soll. Der Verfasser fürchtet aber, daß die vierte und fünfte Vertikalreihe nicht bessere Werte als die dritte ergeben haben, weil nur fünfstellige Tafeln der der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen benutzt wurden. Die unvermeidlichen Fehler in der letzten Stelle haben einen vielleicht größeren Einfluß in den viel längeren Berechnungen der Determinanten D_4 und D_5. Der Verfasser möchte den Wert $\lambda^2 = 1{,}32\underline{6}$ als Ergebnis der Berechnungen betrachten.

Das Ergebnis stimmt befriedigend mit Taylors $4\lambda^2 = 5{,}30$. Verschiedene Methoden führen also zu übereinstimmenden Ergebnissen. Es gibt keinen Grund, die Richtigkeit dieser Werte zu bezweifeln.

Sezawa rechnete nur in der ersten Annäherung und fand den Wert $\lambda^2 = 5{,}61$.

Für eine weitere numerische Prüfung wurde λ^2 auch mittels einer vierten Methode ausgerechnet. In Vergleich mit der voranstehenden schließt sich diese Methode den Taylorschen Entwicklungen getreuer an. Sie weicht jedoch darin ab, daß die trigonometrischen Reihen durchgehend nach ungeraden Vielfachen von x und y fortschreiten, währenddem Taylor in seinen Gl. (7) und (8) zu geraden Vielfachen übergeht. Unsere Methode wird im nächsten Kapitel für ein anderes Problem näher entwickelt werden (Kap. II, § 2).

Wenn nur die erste Gleichung und die erste Unbekannte berücksichtigt wurde, fand ich für λ^2 den Wert 1,29.

Kapitel II.

Die Differentialgleichung $\Delta\Delta w + 4\lambda^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$.

§ 1. Die Randbedingungen. Die Differentialgleichung soll für einen rechteckigen Bereich mit dem Seitenverhältnis k gelöst werden. Die Größe des Rechteckes kann man beliebig wählen, weil die Lösungen des zu behandelnden Problemes für ähnliche Rechtecke sich nur durch einen Proportionalitätsfaktor unterscheiden. Um möglichst kurze Ausdrücke zu erhalten, wählen wir den Bereich

$$-\frac{\pi k}{2} \leq x \leq \frac{\pi k}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

[3]) A. a. O.

Die Lösung w der Differentialgleichung soll an den Rändern des Bereiches folgende Bedingungen erfüllen:

$$w(x, y) = 0 \text{ für } x = \pm \frac{\pi k}{2},\ y \text{ beliebig und für } y = \pm \frac{\pi}{2},\ x \text{ beliebig} \quad (17),$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ für } x = \pm \frac{\pi k}{2},\ y \text{ beliebig} \quad (18),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ für } y = \pm \frac{\pi}{2},\ x \text{ beliebig} \quad (19).$$

§ 2. Die in bezug auf x geraden Lösungen. Unabhängig von den Werten der Koeffizienten a_m und b_n erfüllt jedes Glied der folgenden Reihen die Differentialgleichung und die Randbedingungen (17)

$$w = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} i\, a_m \cos m y \left\{\frac{\cosh p_1 x}{\cosh \frac{p_1 \pi k}{2}} - \frac{\cosh p_2 x}{\cosh \frac{p_2 \pi k}{2}}\right\} + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} b_n \cos K x \left\{\frac{\cosh q_1 y}{\cosh \frac{q_1 \pi}{2}} - \frac{\cosh q_2 y}{\cosh \frac{q_2 \pi}{2}}\right\} \quad (20).$$

In diesen Reihen nehmen m und n nur die Werte der ungeraden ganzen Zahlen an. Die Bezeichnungen haben die Bedeutung

$$K = \frac{n}{k}, \qquad q_1 = \sqrt{K^2 - 2\lambda K}, \qquad q_2 = \sqrt{K^2 + 2\lambda K} \quad (21),$$

$$p_1 = \sqrt{m^2 - \lambda^2 - i\lambda}, \qquad p_2 = \sqrt{m^2 - \lambda^2 + i\lambda} \quad (22).$$

Die Randbedingungen (18) ergeben die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} 0 = & \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} i\, a_m \cos m y \left\{p_1 \operatorname{tgh} \frac{p_1 \pi k}{2} - p_2 \operatorname{tgh} \frac{p_2 \pi k}{2}\right\} \\ & - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} K b_n \sin \frac{n\pi}{2} \left\{\frac{\cosh q_1 y}{\cosh \frac{q_1 \pi}{2}} - \frac{\cosh q_2 y}{\cosh \frac{q_2 \pi}{2}}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (23).$$

Die Randbedingungen (19) ergeben

$$\left.\begin{aligned} 0 = & \sum_{m=1,3,\dots} i\, m\, a_m \sin \frac{m\pi}{2} \left\{\frac{\cosh p_1 x}{\cosh \frac{p_1 \pi k}{2}} - \frac{\cosh p_2 x}{\cosh \frac{p_2 \pi k}{2}}\right\} \\ & - \sum_{n=1,3,\dots} b_n \cos (K x) \left\{q_1 \operatorname{tgh} \frac{q_1 \pi}{2} - q_2 \operatorname{tgh} \frac{q_2 \pi}{2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (24).$$

Die Gl. (23) und (24) dienen zur Bestimmung der noch unbekannten Koeffizienten $a_1, a_3, \dots, b_1, b_3, \dots$. Die Gleichungen müssen für jeden Wert von x und y im Bereiche (16) erfüllt sein. Sie entsprechen der Gl. (10) des ersten Kapitels. Man wird erwarten, daß (23) und (24) auf dieselben Weisen gelöst werden können. Diesmal haben wir uns aber auf die Berechnung numerischer Werte beschränkt und haben nur die folgenden Methoden näher verfolgt.

Für einen beliebigen Wert von λ gibt es keine andere Lösung der Gl. (23) und (24) als $a_1 = a_3 = \dots = b_1 = \dots = 0$. Der kleinste Wert von λ wird gesucht, für den diese Koeffizienten nicht alle gleich Null sein müssen, damit die erwähnten Gleichungen erfüllt werden.

Betrachtet man immer noch in den Gl. (23) und (24) a_m und b_n als die Unbekannten, so sind diese mit veränderlichen, von x und y abhängigen, Zahlen multipliziert. Um konstante Vorzahlen zu erhalten, kann man die Gl. (23) mit $\cos m_1 y$ und die Gl. (24) mit $\cos K_1 x$ multiplizieren und dann jede Gleichung von $y = 0$ bzw. $x = 0$ bis $\pi/2$ integrieren. Dabei ist $K_1 = n_1/k$. m_1 und n_1 sind ungerade ganze positive Zahlen. Läßt man nachher die Beizahl 1 aus und führt die Bezeichnungen[4])

$$\alpha_m = \frac{\pi}{8 m^2} \cdot \frac{\dfrac{\sin(\pi k \lambda)}{\lambda} + \dfrac{\sinh(\pi k \sqrt{m^2 - \lambda^2})}{\sqrt{m^2 - \lambda^2}}}{\cos(\pi k \lambda) + \cosh(\pi k \sqrt{m^2 - \lambda^2})} \quad (25),$$

$$\beta_n = \frac{\pi n}{16 \lambda K^4} \left[q_2 \operatorname{tgh} \frac{\pi q_2}{2} - q_1 \operatorname{tgh} \frac{\pi q_1}{2}\right] \quad (26).$$

[4]) Griechisches α und lateinisches a haben verschiedene Bedeutung!

$$c_{m\,n} = \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{(m^2 + K^2)^2 - 4\,\lambda^2 K^2} \quad \ldots\ldots \quad (27),$$

$$A_m = k^2\, a_m\, m \sqrt{m^2 - \lambda^2}, \qquad B_n = n^2\, b_n \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

ein, so erhält man nach elementaren Rechnungen das Gleichungssystem

$$a_m A_m + \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} c_{m\,n} B_n = 0 \quad (m = 1, 3, 5, \ldots), \qquad \beta_n B_n + \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} c_{m\,n} A_m = 0 \quad (n = 1, 3, 5, \ldots) \quad (29).$$

Die Aufgabe ist nun, diejenigen Werte von λ zu berechnen, für welche dieses System von Null verschiedene Lösungen $A_1, A_3, \ldots, B_1, B_3, \ldots$ besitzt. Um numerische Werte zu erhalten, haben wir als eine erste Annäherung die kleinsten Werte von λ ausgerechnet, für welche das abgekürzte Gleichungssystem

$$a_1 A_1 + c_{1\,1} B_1 = 0, \qquad \beta_1 B_1 + c_{1\,1} A_1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

eine Lösung $A_1\, B_1$ besitzt. Als zweite Annäherung wurden diejenigen kleinsten Werte von λ bezeichnet, für welche das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} a_1 A_1 + c_{1\,1} B_1 + c_{1\,3} B_3 = 0, \qquad & c_{3\,1} B_1 + a_3 A_3 + c_{3\,3} B_3 = 0 \\ c_{1\,1} A_1 + \beta_1 B_1 + c_{3\,1} A_3 = 0, \qquad & c_{1\,3} A_1 + c_{3\,3} A_3 + \beta_3 B_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (31)$$

eine Lösung besitzt. Dieses Gleichungssystem erhält man aus (29), wenn man alle Zahlen mit höheren Beizahlen als 3 gleich Null setzt oder diese Zahlen nicht berücksichtigt.

Bezeichnet man die Determinante des Systemes (30) mit D_2 und des Systemes (31) mit D_4, werden also diejenigen Werte von λ gesucht, für welche folgende Ausdrücke gleich Null werden:

in erster Annäherung: $D_2 = a_1\, \beta_1 - c_{1\,1}^2$,

in zweiter Annäherung:

$$D_4 = (a_1\, \beta_1 - c_{1\,1}^2)(a_3\, \beta_3 - c_{3\,3}^2) - (a_1\, \beta_3\, c_{3\,1}^2 + a_3\, \beta_1\, c_{1\,3}^2 - c_{1\,3}^2\, c_{3\,1}^2 + 2\, c_{1\,1}\, c_{1\,3}\, c_{3\,1}\, c_{3\,3}).$$

D_2 und D_4 wurden für verschiedene Werte von λ berechnet, und dann wurde der kleinste Wert von λ ausprobiert, für den D_2 und D_4 gleich Null werden. Die numerischen Ergebnisse sind in Kapitel III zusammengestellt.

§ 3. Die in bezug auf x ungeraden Lösungen. Jedes Glied der Reihen

$$\left.\begin{aligned} w = & \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} i\, a_m \cos m\, y \left\{ \frac{\sinh p_1 x}{\sinh \frac{\pi k p_1}{2}} - \frac{\sinh p_2 x}{\sinh \frac{\pi k p_2}{2}} \right\} \\ & + \sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty} b_n \sin K x \left\{ \frac{\cosh q_1 y}{\cosh \frac{\pi q_1}{2}} - \frac{\cosh q_2 y}{\cosh \frac{\pi q_2}{2}} \right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

erfüllt die Differentialgleichung und die Randbedingungen (17). Die Bezeichnungen sind dieselben wie in § 2. Ein Unterschied liegt darin, daß n die Reihe der geraden statt der ungeraden ganzen Zahlen durchläuft.

Die Randbedingungen (18) und (19) ergeben in ähnlicher Weise wie im vorigen Paragraphen ein Gleichungssystem von der Form (29) mit dem eben erwähnten Unterschiede, daß n eine gerade ganze Zahl ist. Die Bezeichnungen unterscheiden sich nur durch einige Vorzeichen von denen in § 2:

$$a_m = \frac{\pi}{8\, m^2} \cdot \frac{\dfrac{\sinh(\pi k \sqrt{m^2 - \lambda^2})}{\sqrt{m^2 - \lambda^2}} - \dfrac{\sin(\pi k \lambda)}{\lambda}}{\cosh(\pi k \sqrt{m^2 - \lambda^2}) - \cos(\pi k \lambda)} \quad \ldots\ldots \quad (33),$$

$$c_{m\,n} = \frac{(-1)^{\frac{m+n-1}{2}}}{(m^2 + K^2)^2 - 4\,\lambda^2 K^2} \quad \ldots\ldots \quad (34).$$

β_n behält die Bedeutung (26) unverändert bei.

Gesucht wird der kleinste Wert von λ, für welchen das in Rede stehende Gleichungssystem der Form (29) von Null verschiedene Lösungen in den Unbekannten $a_1, a_3, \ldots, b_2, b_4, \ldots$ besitzt. Die numerischen Rechnungen wurden in derselben Weise wie im vorigen Paragraphen ausgeführt. Die Ergebnisse sind in Kapitel III zusammengestellt.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit Berücksichtigung der Randbedingungen (17), (18) und (19) erhält man durch eine einfache Verallgemeinerung der Ausdrücke (20) und (32). Diese zerfällt aber im Laufe der Rechnungen und gibt uns daher nichts neues, das für unsere Zwecke zu berücksichtigen wäre.

§ 4. Eine andere Art Reihenentwicklungen für die Lösung der Differentialgleichung. Um die Richtigkeit der numerischen Ergebnisse zu prüfen, habe ich für eine quadratische Platte auch die folgende Form der Lösung $w(x, y)$ aufgestellt und durchgerechnet. Die Absicht war auch nachzuprüfen, welche Form den numerischen Rechnungen am besten angepaßt ist.

$$\left.\begin{aligned} w(x, y) = {} & C_1 + a_0 \cos 2\lambda x + C_2 y^2 + C_3(\lambda^2 y^4 - 3x^2) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} i\, a_m \cos m y \left\{\frac{\cosh p_1 x}{p_1 \sinh p_1 \pi} - \frac{\cosh p_2 x}{p_2 \sinh p_2 \pi}\right\} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n x \left\{\frac{\cosh q_1 y}{q_1 \sinh q_1 \pi} - \frac{\cosh q_2 y}{q_2 \sinh q_2 \pi}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (35).$$

Die Bezeichnungen sind dieselben wie früher. p_1, p_2 haben also die in (22) angegebene Bedeutung. k ist gleich eins, weil das Gebiet rechteckig ist. Die Gl. (21) nehmen daher die Form

$$q_1 = \sqrt{n^2 - 2\lambda n}, \qquad q_2 = \sqrt{n^2 + 2\lambda n}$$

an. m und n laufen die Reihe aller ganzen positiven Zahlen durch.

Jedes Glied erfüllt, wie ersichtlich, die Differentialgleichung. Jedes Glied der Reihen erfüllt die Randbedingungen

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = \pi \quad \text{und für} \quad x = -\pi, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{für} \quad y = \pi \quad \text{und für} \quad y = -\pi.$$

Diese Form der Lösung ist also dem Bereiche

$$-\pi \leq x \leq \pi, \qquad -\pi \leq y \leq \pi$$

angepaßt. Dieses ist ein Quadrat mit der doppelten Seitenlänge in Vergleich mit dem Bereiche der vorigen Paragraphen, das ja für $k = 1$ auch gleichseitig ist.

Es ist keine Schwierigkeit, die Lösung auch für ein Rechteck mit ungleichen Seiten durchzuführen. Die numerischen Rechnungen sind aber nur für ein gleichseitiges Bereich gemacht.

Die noch übrigen Randbedingungen $w(x, \pm\pi) = 0$ und $w(\pm\pi, y) = 0$ ergeben nach ähnlichen Rechnungen wie die in den früheren Paragraphen vorkommenden das Gleichungssystem

$$D_1 C - \sum_{m=1}^{\infty} c_{m0} A_m - \sum_{n=1}^{\infty} c_{0n} B_n = 0,$$

$$-c_{m0} C + \alpha_m A_m + \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} B_n = 0, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$-c_{0n} C + \beta_n B_n + \sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} A_m = 0, \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die Bedeutung der Bezeichnungen ist

$$D_1 = \frac{1}{24}\left[\frac{3}{2\lambda^4}(1 - 2\pi\lambda \cot(2\pi\lambda)) + \frac{8\pi^4}{15} - \frac{2\pi^2}{\lambda^2}\right],$$

$$\alpha_m = \frac{\pi}{4\lambda m^2 \sqrt{m^2 - \lambda^2}} \cdot \frac{\sqrt{m^2 - \lambda^2} \sin(2\pi\lambda) + \lambda \sinh(2\pi\sqrt{m^2 - \lambda^2})}{\cosh(2\pi\sqrt{m^2 - \lambda^2}) - \cos(2\pi\lambda)},$$

$$\beta_n = \frac{\pi}{8\lambda n}\left[\frac{\coth \pi q_1}{q_1} - \frac{\coth \pi q_2}{q_2}\right],$$

$$c_{mn} = \frac{(-1)^{m+n+1}}{(m^2 + n^2)^2 - 4\lambda^2 n^2}.$$

$$B_n = n b_n, \quad \alpha_m = A_m \sqrt{m^2 - \lambda^2}, \quad C = -2\lambda^2 a_0 \sin(2\pi\lambda), \quad 3C_2 = -\lambda\pi C, \quad 6\pi\lambda C_3 = C.$$

C, A_m und B_n sind die zu bestimmenden Koeffizienten.

Da der Bereich, wie erwähnt, hier die doppelte Seitenlänge hat wie in den vorigen Paragraphen, wird erwartungsgemäß der Wert von λ halb so groß wie früher ausfallen. Die in Kapitel III angegebenen numerischen Ergebnisse bestätigen diese Erwartung.

Als eine erste Annäherung können wir denjenigen Wert $\lambda = \frac{1}{2} \cdot 1{,}36$ betrachten, für welchen der Ausdruck D_1 gleich Null wird. Die zweite Annäherung ist dann der Wert $\lambda = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5817$, für den die Determinante D_3 des Gleichungssystems

$$D_1 C - c_{01} A_1 - c_{10} B_1 = 0, \qquad -c_{01} C + \alpha_1 A_1 + c_{11} B_1 = 0, \qquad -c_{10} C + c_{11} A_1 + \beta_1 B_1 = 0$$

gleich Null wird. Für die dritte Annäherung $\lambda = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5875$ verschwindet die Determinante D_5 des Systemes von fünf Gleichungen

$$D_1 C - c_{01} A_1 - c_{10} B_1 - c_{02} A_2 - c_{20} B_2 = 0 ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- c_{20} C + c_{12} A_1 \qquad + c_{22} A_2 + \beta_2 B_2 = 0 .$$

Kapitel III.

Die Knickfestigkeit rechteckiger Platten.

§ 1. Bezeichnungen. Die rechteckige Platte soll durch die Geraden $y = \pm b$, $x = \pm k b$ begrenzt sein. Auf den Rändern $y = \pm b$ wirkt je Längeneinheit ein Druck P_1, welcher der y-Achse parallel ist. Der Druck P_2 auf den Rändern $x = \pm k b$ ist der x-Achse parallel. Bezeichnet w die Ausweichung senkrecht zur Plattenebene, so hat die Differentialgleichung des Gleichgewichts im kritischen Zustande der Stabilität die Form

$$N\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + P_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36).$$

N ist der Plattenmodul $\frac{E h^3}{12(1-\sigma^2)}$. E ist der Elastizitätsmodul, σ die Poissonsche Zahl, h die Dicke der Platte.

Was die Ränder der Platte betrifft, können verschiedene Voraussetzungen gemacht werden. Wegen der in der Einleitung angeführten Gründen wurde das Beispiel durchgerechnet, daß alle vier Ränder eingeklemmt sind. In Formeln ausgedrückt:

$$\text{für} \quad x = \pm k b \quad \text{muß} \quad w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 ,$$

$$\text{für} \quad y = \pm b \quad \text{muß} \quad w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0 .$$

Neue Veränderliche werden entweder durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{\pi x}{b}, \quad \eta = \frac{\pi y}{b}, \quad \lambda_1^2 = \frac{P_1 b^2}{\pi^2 N}, \quad \lambda_2^2 = \frac{P_2 b^2}{\pi^2 N} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

oder durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{\pi x}{2b}, \quad \eta = \frac{\pi y}{2b}, \quad 4\lambda_1^2 = \frac{4 P_1 b^2}{\pi^2 N}, \quad 4\lambda_2^2 = \frac{4 P_2 b^2}{\pi^2 N} \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

eingeführt. In den folgenden Paragraphen werden spezielle Voraussetzungen über die Kräfte P_1 und P_2 gemacht werden. Die obenstehende Differentialgleichung und die Randbedingungen reduzieren sich dann auf die schon untersuchten.

§ 2. Der Druck ist auf alle vier Ränder gleichmäßig verteilt. Für eine quadratische Platte mit gleichmäßiger Belastung auf alle vier Ränder ist $P_1 = P_2$ und $k = 1$. Bei der Berechnung der Knickfestigkeit wird man auf das Eigenwertproblem des ersten Kapitels geführt. Als kleinster Eigenwert ergab sich dort $\lambda = \sqrt{1{,}326}$ in naher Übereinstimmung mit K. Sezawas und besonders G. I. Taylors Werten. Aus (37) findet man dann den Druck

$$P_1 = P_2 = \frac{\pi^2 \lambda^2}{b^2} N = \frac{13{,}09\ N}{b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39).$$

Gefahr für Knickung tritt für eine quadratische Platte ein, wenn sie durch Kräfte zusammengedrückt wird, die auf alle vier Ränder gleich verteilt sind und den Wert $P = 13{,}08\ N/b^2$ je Längeneinheit erreichen.

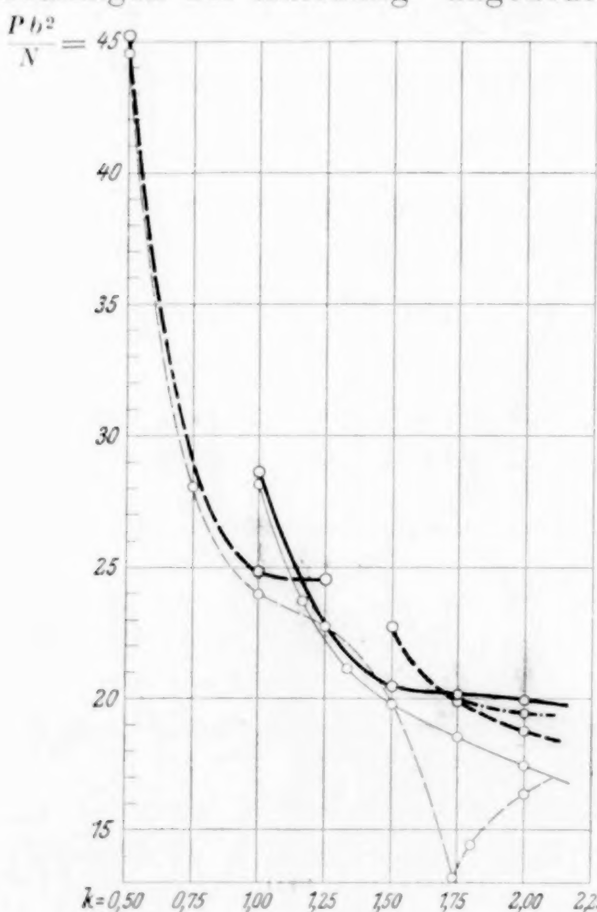
§ 3. Der Druck wirkt nur auf zwei Rändern einer rechteckigen Platte. Der Druck P_2, der in § 1 erklärt wurde, wird gleich Null angenommen. Die Platte hat die Länge $2kb$ in der Richtung der x-Achse und die Breite $2b$. Der Druck P_1, den wir kürzer P benennen, ist der x-Achse parallel.

Die Berechnung der Knickfestigkeit führt auf die Eigenwertprobleme des zweiten Kapitels. Nach (38) ist der Druck, bei dem Gefahr für Knickung eintritt, gleich $P = \frac{\pi^2 \lambda^2}{b^2} N$.

Um Annäherungswerte von λ zu erhalten, haben wir diejenigen Werte berechnet, für welche gewisse s-reihige Determinanten, die in Kapitel II § 2, 3 und 4 erklärt wurden, gleich Null werden.

Die zeitraubenden numerischen Rechnungen hat der Verfasser begonnen. Seine Frau, Elsa Faxén, und Architekt L. M. Giertz haben diese vollendet, wobei der letztere methodische Verbesserungen einführte. Aus den Gleichungen der Paragraphen 2 und 3 des Kapitels II wurden die in der folgenden Tafel angegebenen Annäherungswerte für $\pi^2 \lambda^2 = P b^2 / N$ gefunden.

In Kapitel II § 2 wurde die in bezug auf x gerade Lösung des Problems gesucht. Das entspricht bei Knickung einer ungeraden Anzahl Ausbeulungen, oder wenn man Sezawas Ausdrucksweise den Vorzug gibt, einer ungeraden Anzahl halber Wellenlängen. Die Ergebnisse des Kapitels II § 3 werden demgemäß in der Tafel durch die Worte „gerade Anzahl Ausbeulungen bei Knickung" angedeutet.



Annäherungswerte der Zahl $\pi^2 \lambda^2 = \dfrac{P b^2}{N}$.

k	Anzahl der Ausbeulungen bei Knickung				
	ungerade			gerade	
	$D_2 = 0$	$D_4 = 0$	$D_6 = 0$	$D_2 = 0$	$D_4 = 0$
0,5	44,55	45,20			
0,75	28,1				
1,0	23,99	24,86		28,16	28,62
7/6				23,71	
1,25	22,77	24,55			
4/3				21,18	
1,5	19,82	22,74		19,79	20,49
$\sqrt{3}$	13,16				
1,75		19,94	19,965	18,52	20,18
1,8	14,40				
2,0	16,37	18,755	19,43	17,46	19,93

Die letzte Ziffer in jeder Zahl ist unsicher. Einen Stützpunkt für die Beurteilung der Genauigkeit dieser Zahlen kann man in der folgenden Reihe erhalten. Wendet man auch die Methoden des Paragraphen 4 Kapitel II an, findet man für $P b^2 / N$ die Zahlenreihe: aus D_1: 18,3, aus D_2: 23,99, aus D_3: 24,69, aus D_4: 24,86, aus D_5: 24,87. Die obenstehende Tafel enthält die zweite und die vierte dieser Zahlen.

Je größer die Anzahl s der Reihen der Determinante D_s ist, je größer sind, wie man sieht, die Annäherungswerte. Man hat jedoch aus diesen Zahlen den Eindruck, daß die Reihe der Annäherungswerte rasch konvergiert.

Für technische Zwecke dürfte in dieser Reihe der aus $D_2 = 0$ berechnete Annäherungswert 23,99 schon hinreichend genau sein. Insbesondere sollten die Werte genügen, die aus $D_4 = 0$ berechnet werden. Leider reicht die Genauigkeit der Gleichung $D_2 = 0$ aus nur für kleinere Werte des Verhältnisses k der Länge der Platte in der x-Richtung zu der Länge in der y-Richtung. Aus der obenstehenden Tafel sieht man nämlich, daß D_2 und D_4 sich mehr unterscheiden für größere Werte von k als für k gleich Eins. Für $k = 1,75$ und $k = 2$ kann man sogar bezweifeln, ob die Gleichung $D_4 = 0$ hinreichend genaue Werte liefert. Daher wurde die Gleichung $D_6 = 0$ für diese k-Werte gelöst. Das Ergebnis wurde in die Abbildung als strichpunktierte Kurve eingezeichnet.

Daß die immer besseren Annäherungswerte eine monoton wachsende Folge bilden, dürfte darin eine physikalische Erklärung finden, daß die steigende Annäherung einer immer festeren Bindung der Ränder entspricht, so daß die Steifheit der Platte dadurch erhöht wird.

Gefahr für Knickung tritt für eine rechteckige Platte ein, wenn sie durch Kräfte zusammengedrückt wird, die auf zwei entgegengesetzte Ränder wirken und die den Wert P erreichen. Für P erhält man einen Annäherungswert aus obenstehender Tafel, welche die Annäherungswerte des Bruches $P b^2 / N$ enthält. Die Werte aus der Gleichung $D_4 = 0$ sind genauer als die aus $D_2 = 0$.

Mehr anschaulich als durch die Tafel wird die Knickgefahr durch die Kurven der vorstehenden Figur dargestellt. Die gestrichelten Kurven bedeuten Knickung durch eine ungerade Anzahl Ausbeulungen. Die ausgezogenen Kurven bedeuten Knickgefahr durch eine gerade Anzahl Ausbeulungen.

Dünne Kurven bedeuten das Ergebnis der Gleichung $D_2 = 0$. Die starken Kurven bedeuten das Ergebnis der Gleichung $D_4 = 0$, sind also genauer. Der strichpunktierte Kurvenzug wurde aus der Gleichung $D_6 = 0$ ausgerechnet. Dieser ist also noch genauer. In der Abbildung wird aber diese Verbesserung unmerklich, wenn $k < 1{,}75$ ist.

Die dünne gestrichelte Kurve geht von links bis $k = \sqrt{3}$. Sie bedeutet eine Ausbeulung und endet dort. Der nachfolgende aufsteigende Kurvenzug entspricht Gefahr für Knickung durch drei Ausbeulungen.

Die starke gestrichelte Kurve fällt von $k = 0{,}50$ an anfangs stark, dann sehr langsam. Das Ende bei 1,25 rührt daher, daß die Kurve nicht weiterverfolgt wurde. Dieser Kurvenzug bedeutet Knickung durch nur eine Ausbeulung.

Die wirkliche Knickgefahr erhält man in unserer besten Annäherung, wenn man die Ordinate Pb^2/N für diejenigen der starken Kurven abliest, welche für den betreffenden Wert von k den kleinsten Wert gibt. Wenn $k \geq 1{,}75$ ist, gibt jedoch die strichpunktierte Kurve die beste Annäherung.

Bei einem kleinen Wert von k findet man auf diese Weise, daß eine einzige Ausbeulung in bezug auf Knickung am gefährlichsten ist (starke gestrichelte Kurve). Wird k größer als 1,15, werden zwei Ausbeulungen gefährlicher, denn die ausgezogene starke Kurve schneidet die starke gestrichelte und geht dann unterhalb dieser. Die Mittellinie der Platte hat die Form eines länglichen s.

Bei noch größeren Werten von k, d. h. noch mehr länglichen Platten, schneidet die starke gestrichelte Kurve nochmals und fällt unterhalb der starken ausgezogenen. So verläuft auch die Verbesserung, die strichpunktierte Kurve. Das bedeutet Knickgefahr bei drei Ausbeulungen.

Unsere starken Kurven stimmen mit Sezawas Werten recht gut, wie man aus der folgenden auf unsere Bezeichnungen umgerechnete Tafel ersieht:

Zahl der halben Wellen-längen	$k = 0{,}5$	1,0	1,5	2
1	50,7	26,3	32,9	
2		29,1	20,2	17,1
3			22,5	14,9
4				22,5

Diese Tafel stellt nur eine Art erster Annäherung dar. Darin dürfte die Erklärung der weniger guten Übereinstimmung bei $k = 2$ liegen.

H. Grauers[5]) behauptet, die genaue Lösung der Schwingungs- und Knickungsprobleme der rechteckigen Platten gefunden zu haben. Seine Darstellung leidet aber an inneren Widersprüchen, auf die wir hier aus Platzmangel nicht eingehen können. Die numerischen Ergebnisse stimmen, soweit geprüft wurde, auch nicht.

Wir möchten endlich bemerken, daß die durch (25), (26), (33) erklärten α_m und β_n eine selbständige Bedeutung haben. $\alpha_m = 0$ bestimmt die Knickbelastung, wenn nur die mit der y-Achse parallelen Ränder der Platte eingeklemmt sind und die übrigen zwei gestützt. Aus $\beta_n = 0$ kann man dagegen die Knickbelastung berechnen für eine Platte, deren mit der x-Achse parallelen Ränder gestützt und die übrigen eingeklemmt sind. Die Kraft ist der x-Achse parallel und wirkt auf die mit der y-Achse parallelen Ränder.

Der Verfasser hat die Hoffnung, u. a. die Rechnungen auch für den Fall durchzuführen, in dem die Befestigung der Platte keinerlei Ausdehnung nach den nicht belasteten Rändern hin erlaubt.

Die Verwendbarkeit der obenstehenden Methoden auf manche schwierige Randwertprobleme bei den Differentialgleichungen $\Delta u + \ldots = 0$ oder $\Delta \Delta u + \ldots = 0$ möge am Ende erwähnt werden. 529

Göteborg, im Mai 1934.

[5]) Ingenjörsvetenskapsakademiens handlingar N:r 98, Stockholm 1929.

Das Ausknicken eines Plattenstreifens unter Schub- und Druckkräften.

Von *C. Schmieden* in Rostock.

Einleitung. Die vorliegende Arbeit hat das Ziel, die Knicklasten eines unendlich-langen Plattenstreifens bei gleichzeitiger Beanspruchung durch Schub- und Druckkräfte in seiner Ebene zu berechnen. Die zur Lösung führende Methode wurde erstmalig von Southwell und Skan[1]) angewandt und seitdem in einer ganzen Reihe von Arbeiten verschiedener Autoren auf ähnlich gelagerte Probleme übertragen. Methodisch bringt die vorliegende Arbeit daher nichts wesentlich Neues; dagegen dürften ihre Resultate einiges praktische Interesse bieten, da sich ganz außerordentlich einfache Schlußformeln ergeben, die mit einem Minimum von Arbeitsaufwand die Knicklast für jede beliebige Beanspruchung zu berechnen gestatten.

1. Differentialgleichung und Lösungsansatz. Der Plattenstreifen erstrecke sich in x-Richtung von $-\infty$ bis $+\infty$ und besitze die Breite $2b$, so daß also $y = \pm b$ die Gleichung seiner Ränder ist. Der Streifen werde in seiner Ebene am Rande durch einen konstanten Schub S/cm und einen konstanten Druck P_y/cm in y-Richtung, ferner durch einen konstanten Druck P_x/cm in x-Richtung beansprucht. Unter diesen Voraussetzungen lautet die Differentialgleichung für die Durchbiegung w

$$N\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = -P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2S\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad N = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

N ist dabei die Plattensteifigkeit, $2h$ die Plattendicke und ν die Poissonsche Konstante.

Durch Einführung von

$$x = b\xi, \quad y = b\eta, \quad \sigma_x = \frac{P_x b^2}{N}, \quad \sigma_y = \frac{P_y b^2}{N}, \quad \tau = \frac{S b^2}{N}$$

wird (1) dimensionslos und geht über in

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = -\sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a).$$

Randbedingungen sind

für ξ: w muß in ξ eine rein-periodische Funktion sein;

für η: a) eingespannter Rand: $w = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0$ für $\eta = \pm 1$,

b) frei-aufliegender Rand: $w = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0$ für $\eta = \pm 1$.

Das Wesen der Methode von Southwell und Skan besteht nun darin, daß nicht w direkt, sondern eine komplexe Funktion w' bestimmt wird, die der Differentialgleichung genügt (w' kann natürlich nicht analytisch sein). Da (1a) eine lineare Differentialgleichung ist, muß dann sowohl der Realteil von w' wie auch der Imaginärteil für sich dieser Differentialgleichung genügen. Als Durchbiegung w kann man dann entweder den Realteil oder den Imaginärteil von w' benutzen, da beide bis auf eine Parallelverschiebung des Koordinatenanfangs in ξ-Richtung dasselbe geben.

Für ein Partikularintegral w' machen wir jetzt mit festem, aber noch freiem $\varkappa$ den Ansatz

$$w = e^{i\varkappa\xi} \cdot e^{i\lambda\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

der beim Einsetzen in (1a) für λ die Gleichung vierten Grades mit reellen Koeffizienten liefert:

$$\lambda^4 + \lambda^2(2\varkappa^2 - \sigma_y) - 2\varkappa\tau\lambda + \varkappa^4 - \sigma_x\varkappa^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Zu einem $\varkappa$ gehören vier Wurzeln λ_i, so daß man vier unabhängige Partikularintegrale und damit, bei gegebenem $\varkappa$, das vollständige Integral erhält, das die Randbedingung für ξ erfüllt.

[1]) Proc. Royal Soc. Ser. A. Bd. 105 (1924), S. 582.

Da der Koeffizient von λ^3 in (3) verschwindet, ist die Summe der vier Wurzeln Null, so daß man ansetzen kann

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta, \qquad \lambda_{3,4} = -\alpha \pm \gamma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Hier ist α immer reell, β und γ sind, unabhängig voneinander, entweder reell oder rein imaginär, je nachdem die Wurzeln von (3) alle reell, oder zwei reell und zwei konjugiert komplex, oder je zwei konjugiert komplex ausfallen. Auf Grund von (4) kann man durch Koeffizientenvergleich (3) ersetzen durch

$$-2\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 2\varkappa^2 - \sigma_y; \quad (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) = \varkappa^4 - \sigma_x \varkappa^2; \quad \alpha(\beta^2 - \gamma^2) = \varkappa \tau \quad \ldots \quad (I).$$

2. Diskussion der Knickgleichung. Setzen wir die Randbedingungen für w' an, so erhalten wir in beiden Fällen vier homogene lineare Gleichungen für die vier Integrationskonstanten, die nur dann eine von Null verschiedene Lösung besitzen, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet. Diese Determinante, gleich Null gesetzt, ist die Knickgleichung.

Sind alle Wurzeln λ_i verschieden voneinander, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) eingespannt:} && 2\beta\gamma[\cos 2\beta \cos 2\gamma - \cos 4\alpha] = [4\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2]\sin 2\beta \sin 2\gamma, \\ &\text{b) frei-aufliegend:} && 8\alpha^2\beta\gamma[\cos 2\beta \cos 2\gamma - \cos 4\alpha] = [4\alpha^2(\beta^2+\gamma^2) - (\beta^2-\gamma^2)^2]\sin 2\beta \sin 2\gamma \end{aligned}\right\} \quad (II).$$

Sind zwei Wurzeln gleich ($\gamma = 0$), so erhält man auf dieselbe Weise

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) eingespannt:} && \beta(\cos 2\beta - \cos 4\alpha) = (4\alpha^2 - \beta^2)\sin 2\beta, \\ &\text{b) frei-aufliegend:} && 4\alpha^2(\cos 2\beta - \cos 4\alpha) = \beta(4\alpha^2 - \beta^2)\sin 2\beta \quad \text{oder } \beta = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (II').$$

Für zwei Doppelwurzeln (die notwendig reell sein müssen, s. u.) ($\beta = \gamma = 0$)

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) eingespannt:} && 4\alpha^2 = \sin^2 2\alpha, \\ &\text{b) frei-aufliegend:} && 4\alpha^2(1 - \cos 4\alpha) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II'').$$

Und schließlich für eine dreifache und eine einfache Wurzel ($\gamma = 0$; $\beta = 2\alpha$)

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) eingespannt:} && 4\alpha\cos 4\alpha = \sin 4\alpha, \\ &\text{b) frei-aufliegend:} && \alpha(4\alpha\cos 4\alpha + 3\sin 4\alpha) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II''').$$

Eine vierfache Wurzel tritt nur für $\alpha = 0$ auf, also in dem trivialen Fall des Nichtausknickens.

Bei der Diskussion der Gl. (II) können wir uns auf den Bereich $\alpha > 0$ und β, γ positiv reell oder positiv imaginär beschränken, da sich bei Vorzeichenumkehr einer dieser Größen die Gleichungen nicht ändern. Dann besitzen die Gl. (II) zunächst die trivialen Lösungen

$$1.\ \beta = 0, \qquad 2.\ \gamma = 0, \qquad 3.\ \beta + \gamma = 2\alpha, \qquad 4.\ \beta - \gamma = 2\alpha.$$

Alle diese Lösungen sind unbrauchbar, da jedesmal zwei der λ_i gleich werden, also Doppelwurzeln auftreten, für die (II) nicht gilt. Ebenso ist es bei den Gl. (II'); hier sind $\beta = 0$ und $\beta = 2\alpha$ triviale Lösungen, denen der Fall zweier Doppelwurzeln bzw. der einer dreifachen Wurzel entspricht. (II'') besitzt im Falle a) nur die Lösung $\alpha = 0$, im Falle b) außerdem die Wurzeln $\alpha = \frac{n\pi}{2}$. Für einen frei-aufliegenden Streifen können also möglicherweise zwei Doppelwurzeln auftreten. Schließlich kann eine dreifache Wurzel für beide Arten der Auflagerung auftreten.

Wir beweisen jetzt zunächst, daß die Knickgleichung im Bereich kleiner α, β, γ keine Lösung besitzt. Entwickeln wir (II) in der Umgebung des Nullpunktes, so erhalten wir in beiden Fällen bis auf Terme achter Ordnung

$$0 = [4\alpha^2 - (\beta+\gamma)^2] \cdot [4\alpha^2 - (\beta-\gamma)^2] \cdot 4\beta\gamma,$$

so daß für kleine α, β, γ nur die auszuschließenden Lösungen auftreten

$$\beta = 0; \qquad \gamma = 0; \qquad 2\alpha = \pm(\beta+\gamma); \qquad 2\alpha = \pm(\beta-\gamma).$$

Weiter beweisen wir, daß nicht alle λ_i komplex sein können, oder mit anderen Worten, daß β und γ nicht gleichzeitig imaginär sein können. Setzen wir $\beta = i\beta'$ und $\gamma = i\gamma'$ und lassen die Akzente gleich wieder fort, so geht (II a) über in

$$2\beta\gamma[\mathfrak{Cof}\,2\beta\,\mathfrak{Cof}\,2\gamma - \cos 4\alpha] = [4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2]\,\mathfrak{Sin}\,2\beta\,\mathfrak{Sin}\,2\gamma, \qquad \alpha, \beta, \gamma > 0$$

oder

$$2\beta\gamma[\mathfrak{Cof}\,2\beta\,\mathfrak{Cof}\,2\gamma - 1 + 2\sin^2 2\alpha] = [4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2]\,\mathfrak{Sin}\,2\beta\,\mathfrak{Sin}\,2\gamma.$$

Nun gilt zunächst

$$4\beta\gamma\sin^2 2\alpha < 4\alpha^2\,\mathfrak{Sin}\,2\beta\,\mathfrak{Sin}\,2\gamma,$$

da für $\alpha, \beta, \gamma > 0$

$$\frac{\sin^2 2\alpha}{4\alpha^2} < 1; \qquad \frac{\mathfrak{Sin}\,2\beta}{2\beta} > 1; \qquad \frac{\mathfrak{Sin}\,2\gamma}{2\gamma} > 1.$$

Es bleibt zu zeigen, daß auch

$$2\beta\gamma[\mathfrak{Cof}\,2\beta\,\mathfrak{Cof}\,2\gamma - 1] < (\beta^2 + \gamma^2)\,\mathfrak{Sin}\,2\beta\,\mathfrak{Sin}\,2\gamma.$$

Zum Beweise dieser Ungleichung leiten wir aus ihr die folgenden Ungleichungen ab:

$$2\beta\gamma[\mathfrak{Cof}\,2(\beta+\gamma) + \mathfrak{Cof}\,2(\beta-\gamma) - 2] < (\beta^2+\gamma^2)[\mathfrak{Cof}\,2(\beta+\gamma) - \mathfrak{Cof}\,2(\beta-\gamma)]$$

$$(\beta+\gamma)^2\,\mathfrak{Cof}\,2(\beta-\gamma) < (\beta-\gamma)^2\,\mathfrak{Cof}\,2(\beta+\gamma) + (\beta+\gamma)^2 - (\beta-\gamma)^2$$

$$(\beta+\gamma)^2\,\mathfrak{Sin}^2(\beta-\gamma) < (\beta-\gamma)^2\,\mathfrak{Sin}^2(\beta+\gamma)$$

$$\frac{\mathfrak{Sin}^2(\beta-\gamma)}{(\beta-\gamma)^2} < \frac{\mathfrak{Sin}^2(\beta+\gamma)}{(\beta+\gamma)^2}.$$

Diese letzte Ungleichung ist aber sicher erfüllt, da β, γ beide > 0 und $\frac{\mathfrak{Sin}\,x}{x}$ mit wachsendem x monoton zunimmt.

Ebenso läßt sich zeigen, daß beim Auftreten einer Doppelwurzel die beiden andern Wurzeln notwendig reell sein müssen.

Im Falle (II b) schließlich sieht man unmittelbar, daß β und γ nicht beide imaginär sein können, da hier beide Seiten der Gleichung immer entgegengesetzte Vorzeichen bekommen.

Im folgenden setzen wir demnach immer β als reell voraus, während γ sowohl reell wie imaginär werden kann.

3. Reiner Druck in Längs- und Querrichtung ($\tau = 0$). Ist der Schub nicht vorhanden, so folgt aus (I) $\alpha = 0$ (die andere Möglichkeit $\beta = \gamma$ scheidet aus, wie sich im folgenden ergibt). Damit vereinfachen sich (I) und (II) erheblich zu

$$-\beta^2 - \gamma^2 = 2\varkappa^2 - \sigma_y, \qquad \beta^2\gamma^2 = \varkappa^4 - \sigma_x\varkappa^2 \quad \ldots\ldots \quad \text{(I)},$$

$$2\beta\gamma(1 - \cos 2\beta\cos 2\gamma) = (\beta^2 + \gamma^2)\sin 2\beta\sin 2\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II a)},$$

$$(\beta^2 - \gamma^2)^2\sin 2\beta\sin 2\gamma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II b)}.$$

Aus (I) folgt, daß γ im ganzen Bereich imaginär sein muß: für $\sigma_y = 0$ ist das klar. Würde für ein endliches σ_y γ reell, so müßte es ein σ_y geben, für das $\gamma = 0$ ist. Für $\gamma = 0$ gilt aber (II'), das jetzt lautet:

$$\sin\beta(\beta\cos\beta - \sin\beta) = 0, \qquad \beta_{\min} = \pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II' a)},$$

$$\beta\sin 2\beta = 0, \qquad \beta_{\min} = \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II' b)}.$$

Zu $\gamma = 0$ gehört jedenfalls $\varkappa = 0$, also $\sigma_y = \beta^2 = \pi^2$ bzw. $\frac{\pi^2}{4}$, d. h. in beiden Fällen die Eulerlast für reinen Druck in Querrichtung. Die andere Möglichkeit $\sigma_x = \varkappa^2$ liefert für $\sigma_y = \beta^2 + 2\varkappa^2 > \beta^2$, scheidet also aus. Somit ist γ im ganzen zulässigen Bereich rein imaginär.

Für den frei-aufliegenden Streifen kann man jetzt die Lösung sofort hinschreiben: aus (IIb) folgt $\beta = \frac{n\pi}{2}$, also $\beta_{\min} = \frac{\pi}{2}$ und hieraus

$$\gamma^2 = \sigma_y - \frac{\pi^2}{4} - 2\varkappa^2 = \frac{4}{\pi^2}(\varkappa^4 - \sigma_x \varkappa^2),$$

also
$$\sigma_x = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} - \sigma_y\right)\cdot\frac{1}{\varkappa^2} + \frac{\pi^2}{2} + \varkappa^2 .$$

Zu jedem $\sigma_y < \frac{\pi^2}{4}$ erhält man also ein kontinuierliches Eigenwertspektrum: zu jedem σ_x gehören zwei Werte von $\varkappa$, wobei für $\varkappa \to 0$ und $\varkappa \to \infty$ beide Male $\sigma_x \to \infty$ geht. Unter allen σ_x gibt es ein kleinstes, das sich leicht bestimmen läßt. Man erhält

$$\sigma_x{}^* = \frac{\pi^2}{2} + \pi\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - \sigma_y}; \qquad \varkappa^{*2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - \sigma_y}.$$

Interessant ist, daß man für ein σ_y, das beliebig wenig kleiner ist als $\frac{\pi^2}{4}$, die Eulerlast, zum Ausknicken ein $\sigma_x > \frac{\pi^2}{2}$ braucht.

Nicht ganz so einfach erledigt sich der Fall eingespannter Ränder. Die Gl. (IIa) schreibt sich wegen des imaginären γ ($\gamma = i\gamma'$ und der Akzent wieder fortgelassen)

$$2\beta\gamma(1 - \cos 2\beta \operatorname{Cof} 2\gamma) = (\beta^2 - \gamma^2)\sin 2\beta \operatorname{Sin} 2\gamma .$$

Wie man leicht nachrechnet, läßt sich dieser Ausdruck zerlegen in

$$4(\beta\cos\beta \operatorname{Sin}\gamma - \gamma\sin\beta \operatorname{Cof}\gamma)(\beta\sin\beta \operatorname{Cof}\gamma + \gamma\cos\beta \operatorname{Sin}\gamma) = 0 .$$

Zusammengehörige Werte von β, γ folgen also aus den beiden Gleichungen

$$\beta \operatorname{tg}\beta = -\gamma \operatorname{Tg}\gamma \qquad \text{oder} \qquad \beta \operatorname{ctg}\beta = \gamma \operatorname{Ctg}\gamma .$$

Bei festem γ liegen die kleinsten Werte von β bei der ersten Gleichung in dem Bereich $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, bei der zweiten in dem Bereich $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$, also ist, um die kleinsten Knicklasten zu erhalten, die erste Gleichung zu benutzen. Sind β und γ bestimmt, so erhält man bei gegebenem σ_y, σ_x und $\varkappa$ aus (I),

$$2\varkappa^2 = \sigma_y + \gamma^2 - \beta^2, \qquad \sigma_x = \varkappa^2 + \frac{\gamma^2\beta^2}{\varkappa^2}.$$

Die numerischen Ergebnisse sind in Tabelle I zusammengestellt. Die unterstrichenen Werte gehören zu den numerisch sehr genau bestimmten Minima (für $\sigma_y = 9{,}5$ und $\sigma_y = 9{,}8578$ nicht berechnet). Für $\sigma_y = \pi^2$ erhält man als Minimalwert $\sigma_x{}^* = \frac{2}{3}\pi^2$ und $\varkappa^* = 0$. Das ist wieder in dem Sinne zu verstehen, daß für σ_y beliebig wenig kleiner als π^2 $\sigma_x > \frac{2}{3}\pi^2$ sein muß, um ein Ausknicken der Platte zu erreichen.

Tabelle I.

$\sigma_y = 0$		$\sigma_y = 3$		$\sigma_y = 6$		$\sigma_y = 9$		$\sigma_y = 9{,}5$		$\sigma_y = 9{,}8578$	
$\varkappa$	σ_x	$\varkappa$	σ_x	$\varkappa$	σ_x	$\varkappa$	σ_x	$\varkappa$	σ_x	$\varkappa$	σ_x
5,616	38,36	3,894	22,53	2,695	15,12	1,808	10,51	1,666	9,63	1,519	8,78
3,696	21,84	3,009	17,50	2,278	13,79	1,590	10,05	1,459	9,14	1,313	8,23
2,749	17,67	2,400	15,66	1,934	13,32	1,371	9,83	1,243	8,80	1,088	7,73
<u>2,379</u>	<u>17,20</u>	<u>2,174</u>	<u>15,49</u>	<u>1,902</u>	<u>13,31</u>	<u>1,314</u>	<u>9,81</u>	1,003	8,71	0,823	7,27
2,064	17,65	1,921	17,78	1,627	13,65	1,138	9,95	0,706	9,46	0,437	6,96
1,480	22,57	1,497	18,23	1,330	15,15	0,869	11,01				

4. Druck in Querrichtung und Schub ($\sigma_x = 0$). Es ist klar, daß man sich auf Werte von $\sigma_y < \pi^2$ (eingespannt) und $\sigma_y < \frac{\pi^2}{4}$ (frei-aufliegend) beschränken kann. Die Gl. (I) lauten jetzt

$$-2\,\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 2\,\varkappa^2 - \sigma_y; \qquad (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) = \varkappa^4; \qquad \alpha(\beta^2 - \gamma^2) = \varkappa\,\tau\,.$$

Für reinen Schub ($\sigma_y = 0$) haben Southwell und Skan die Lösung angegeben, γ wird rein imaginär. Für verschwindenden Schub wird aber γ reell, so daß bei kombinierter Beanspruchung für gewisse σ_y und τ γ verschwinden, also Doppelwurzeln auftreten müssen. Für diese Doppelwurzeln muß außerdem $\alpha^2 > \beta^2$ und $\sigma_y < \sigma_E$ sein. Die Auflösung von (II′) ergibt, daß bei eingespanntem Rand Doppelwurzeln für $\sigma_y > 9{,}18$ auftreten, und bei frei-aufliegendem Rand für $\sigma_y > 2{,}445$. In beiden Fällen ist der Bereich, in dem Doppelwurzeln auftreten können, sehr klein, da die zugehörigen Werte von σ_y sich nur wenig von den größtmöglichen σ_y unterscheiden.

Das numerische Material wurde so gewonnen, daß σ_y ein fester Wert $< \sigma_E$ erteilt wurde und die zugehörigen Werte von $\varkappa$ und τ aus (I) und (IIa) bzw. (IIb) numerisch berechnet wurden. Die Ergebnisse sind in der Tabelle II zusammengestellt, wobei das Zahlenmaterial für $\sigma_y = 0$ der Arbeit von Southwell-Skan entnommen wurde.

Tabelle II.

a) Eingespannte Ränder; $\sigma_x = 0$.

$\sigma_y = 0$					$\sigma_y = 3$					$\sigma_y = 6$				
α	β	γ	$\varkappa$	τ	α	β	γ	$\varkappa$	τ	α	β	γ	$\varkappa$	τ
2,079	1,787	4,790 i	$\frac{3}{4}\pi$	23,07	2,008	1,802	4,039 i	2	19,63	2,036	1,800	3,678 i	2,0	17,07
1,977	1,804	4,334 i	$\frac{5}{8}\pi$	22,18	1,916	1,816	3,546 i	$\frac{\pi}{2}$	19,36	1,920	1,815	3,028 i	1,5	15,95
1,903	1,817	3,934 i	$\frac{1}{2}\pi$	22,75	1,850	1,829	3,031 i	1	23,18	1,850	1,822	2,483 i	1,0	17,54
1,858	1,826	3,608 i	$\frac{3}{8}\pi$	25,78						1,823	1,821	2,113 i	0,5	28,00
$\sigma_y = 9$					$\sigma_y = 9{,}5$					$\sigma_y = 9{,}8578$				
1,938	1,803	2,502 i	1,5	12,29	1,940	1,798	2,400 i	1,5	11,66	1,830	1,778	1,415 i	1,0	9,45
1,840	1,797	1,732 i	1,0	11,46	1,835	1,787	1,558 i	1,0	10,32	1,748	1,735	0	0,609	8,64
1,775	1,771	0,968 i	0,5	14,45	1,752	1,746	0,428 i	0,5	11,32	1,699	1,695	0,944	0,4	8,42
					1,734	1,731	0,410 i	0,4	12,26	1,646	1,645	1,285	0,2	8,69

b) Frei-aufliegende Ränder; $\sigma_x = 0$.

$\sigma_y = 0$					$\sigma_y = 0{,}8$				
α	β	γ	$\varkappa$	τ	α	β	γ	$\varkappa$	τ
2,205	1,479	5,626 i	π	23,77	1,531	1,395	3,214 i	1,5	12,53
1,850	1,452	4,479 i	$\frac{3}{4}\pi$	17,42	1,440	1,367	2,846 i	1,2	11,96
1,556	1,410	3,430 i	$\frac{1}{2}\pi$	13,63	1,388	1,347	2,621 i	1,0	12,06
1,445	1,383	2,977 i	$\frac{3}{8}\pi$	13,21	1,296	1,292	2,175 i	0,5	16,59
1,366	1,350	2,605 i	$\frac{1}{4}\pi$	14,97					
$\sigma_y = 1{,}6$					$\sigma_y = 2{,}4$				
1,529	1,381	3,079 i	1,5	11,61	1,526	1,366	2,936 i	1,5	10,67
1,430	1,349	2,682 i	1,2	10,74	1,415	1,323	2,497 i	1,2	9,42
1,370	1,322	2,429 i	1,0	10,48	1,345	1,288	2,209 i	1,0	8,79
1,248	1,243	1,887 i	0,5	12,74	1,159	1,151	1,453 i	0,5	7,97
					1,100	1,099	1,186 i	0,3	9,58

Aus der Tabelle sieht man, daß bei eingespannten Rändern α, β, γ desto mehr gegen $\frac{\pi}{2}$ gehen, je mehr sich σ_y π^2 nähert und je kleiner $\varkappa$ ist. An Stelle dieses Wertetripels kann man auch das Tripel α, γ klein, β annähernd π einführen, was für die λ_i dieselben Werte ergibt. Für die folgende Rechnung ist dies letztere Tripel angenehmer zu behandeln.

Wir verschaffen uns jetzt die Nachbarlösungen zu $\sigma_y = \pi^2$, $\beta = \pi$, $\alpha = \gamma = \varkappa = 0$, indem wir setzen $\sigma_y = \pi^2 - \sigma'_y$, $\beta = \pi + \beta'$, $\alpha = \alpha'$, $\gamma = \gamma'$, $\varkappa = \varkappa'$. Alle gestrichenen Größen sollen dabei als klein betrachtet werden.

Für den Fall eingespannter Ränder, den wir allein ausführlich durchrechnen wollen, bekommen wir beim Einsetzen in (IIa), wenn wir die Akzente gleich wieder fortlassen,

$$2(\pi+\beta)\gamma[\cos 2\beta \cos 2\gamma - \cos 4\alpha] = [4\alpha^2 - \pi^2 - 2\pi\beta - \beta^2 - \gamma^2] \sin 2\beta \sin 2\gamma$$
$$-2\alpha^2 - 2\pi\beta - \beta^2 - \gamma^2 = 2\varkappa^2 + \sigma_y;$$

$$(\alpha^2 - \pi^2 - 2\pi\beta - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) = \varkappa^4, \qquad \alpha^2(\pi^2 + 2\pi\beta + \beta^2 - \gamma^2)^2 = \varkappa^2\tau^2.$$

Entwickeln wir die erste Gleichung, so bekommen wir bis auf Terme fünfter Ordnung nach Kürzen durch 4γ

$$(\pi+\beta)\left[\beta^2 + \gamma^2 - 4\alpha^2 - \frac{1}{3}(\beta^4 + \gamma^4 + 6\beta^2\gamma^2 - 16\alpha^4)\right] = \beta\left(1 - \frac{2}{3}(\beta^2+\gamma^2)\right)[\pi^2 + 2\pi\beta + \beta^2 + \gamma^2 - 4\alpha^2].$$

In erster Näherung folgt $\pi\beta = \gamma^2 - 4\alpha^2$, β ist also klein zweiter Ordnung. Setzen wir demgemäß $\beta = \delta^2$, so wird bis auf Terme sechster Ordnung

$$\pi(\gamma^2 - 4\alpha^2) - \frac{\pi}{3}(\gamma^4 - 16\alpha^4 - 3\delta^4) + \delta^2(\gamma^2 - 4\alpha^2) = \pi^2\delta^2 + \delta^2(\gamma^2 - 4\alpha^2 + 2\pi\delta^2) - \frac{2}{3}\pi^2\delta^2\gamma^2.$$

In den Termen vierter Ordnung können wir $\delta^2 = \frac{1}{\pi}(\gamma^2 - 4\alpha^2)$ setzen und erhalten somit in derselben Annäherung

$$\delta^2 = \frac{1}{\pi}(\gamma^2 - 4\alpha^2) + \frac{1}{3\pi}\left(1 - \frac{3}{\pi^2}\right)(\gamma^2 - 4\alpha^2)^2,$$

während die beiden anderen Gleichungen bei demselben Grad der Näherung liefern

$$6\alpha^2 - 3\gamma^2 - (\gamma^2 - 4\alpha^2)^2 \cdot \frac{2\pi^2 - 3}{3\pi^2} = 2\varkappa^2 + \sigma_y, \qquad \alpha^2 - \gamma^2 = -\frac{\varkappa^4}{\pi^2} \to \gamma^2 = \alpha^2 + \frac{\varkappa^4}{\pi^2}.$$

Die Elimination von α, γ aus diesen Gleichungen ergibt zwischen τ und $\varkappa$ die folgende Beziehung $\left(\frac{2\pi^2 - 17}{3\pi^2} = 0{,}092\right)$

$$\tau^2[1 - 0{,}092(\sigma_y + 2\varkappa^2)] = \frac{2}{3}\pi^4 + \frac{\pi^4\sigma_y}{3\varkappa^2} + \pi^2\varkappa^2.$$

Diese Näherungsformel gilt nach ihrer Ableitung für kleine σ_y und $\varkappa$. Sie gibt für $\sigma_y \neq 0$ und $\varkappa \to 0$, $\tau \to \infty$, aber so, daß $\varkappa\tau \sim \pi^2\sqrt{\frac{\sigma_y}{3}}$, also klein erster Ordnung ist, wenn σ_y als klein zweiter Ordnung vorausgesetzt wird, wie es aus den obigen Gleichungen folgt. Der Koeffizient von τ^2 ist im ganzen zulässigen Bereich so nahe Eins, daß man ihn genau genug durch Eins ersetzen kann, also

$$\tau^2 = \frac{2}{3}\pi^4 + \frac{\pi^4\sigma_y}{3\varkappa^2} + \pi^2\varkappa^2$$

und für $\sigma_y = 0$

$$\tau^2 = \frac{2}{3}\pi^4 + \pi^2\varkappa^2.$$

Auch in diesem Falle erhalten wir also wieder das Resultat, daß zu einem Querdruck, der beliebig wenig kleiner als π^2 ist, ein endlicher Schub $\tau > \pi^2 \sqrt{\frac{2}{3}}$ nötig ist, um den Streifen zum Ausknicken zu bringen. Die Erklärung für dieses zunächst überraschende Verhalten der Platte ist in beiden Fällen dieselbe: Wirkt ein Querdruck allein, so knickt die Platte als Ganzes ohne Wellenbildung aus, bei kombinierter Beanspruchung tritt dagegen beim Ausknicken immer eine Wellenbildung ein, und die potentiellen Energien in beiden Zuständen unterscheiden sich um einen endlichen Betrag.

5. Druck in Längs- und Querrichtung mit zusätzlichem kleinen Schub. In derselben Weise wie am Ende des vorigen Abschnitts verschaffen wir uns jetzt die Nachbarlösungen zu dem Falle reiner Druckbeanspruchung, setzen also τ als klein gegen σ_y und σ_x voraus. Weiter wollen wir σ_y fest vorgeben und nach dem Zusammenhang zwischen τ und σ_x fragen. Ausführlich behandeln wir nur den Fall frei-aufliegender Ränder. Die Minimalwerte von $\sigma_x, \varkappa, \beta, \gamma$ als Funktion von σ_y bezeichnen wir mit $\sigma_{x0}, \varkappa_0, \beta_0, \gamma_0$ und entnehmen dem Abschn. 2

$$\beta_0 = \frac{\pi}{2}; \qquad \gamma_0^2 = \frac{\pi^2}{4} - \sigma_y + \pi \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - \sigma_y}; \qquad \varkappa_0^2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - \sigma_y}; \qquad \sigma_{x0} = \frac{\pi^2}{2} + 2\varkappa_0^2.$$

Aus der Gl. (IIb) des Abschn. 2 folgt zunächst wegen $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$, wenn wir wieder $\beta = \beta_0 + \beta'$ und $\gamma = \gamma_0 + \gamma'$ setzen (α klein erster Ordnung $= \alpha'$)

$$-4\alpha'^2 \pi \gamma_0 [\mathfrak{Cof}\, 2\gamma_0 + 1] = 2\beta' (\gamma_0^2 + \beta_0^2)^2\, \mathfrak{Sin}\, 2\gamma_0$$

oder wegen $\beta_0^2 + \gamma_0^2 = \sigma_{x0} - \sigma_y$

$$-\beta' \pi = \frac{2\alpha'^2 \gamma_0 \pi^2\, \mathfrak{Cotg}\, \gamma_0}{(\sigma_{x0} - \sigma_y)^2}.$$

Die Gl. (I) liefern, wenn wir $\sigma_x = \sigma_{x0} - \sigma'_x$; $\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa'$ setzen und gleich die endlichen Terme fortlassen

$$-2\alpha'^2 + 2\gamma' \gamma_0 - \beta' \pi = 4\varkappa' \varkappa_0,$$

$$\alpha'^2 (\beta_0^2 - \gamma_0^2) + \gamma' \gamma_0 \frac{\pi^2}{2} + \beta' \pi \gamma_0^2 = 2\varkappa' \varkappa_0 (\sigma_{x0} - 2\varkappa_0^2) - \sigma'_x \varkappa_0^2.$$

Die Elimination von α', β', γ' aus diesen Gleichungen gibt eine Beziehung zwischen τ und σ'_x, da sich die mit $\varkappa'$ behafteten Glieder dabei herauskürzen, wie es sein muß, da wir an der Stelle des Minimums von σ_x als Funktion von $\varkappa$ entwickelt haben, $\varkappa$ sich also in erster Näherung nicht ändern darf. Diese Gleichung zwischen τ und σ'_x lautet

$$\tau^2 = \sigma'_x \cdot \frac{(\sigma_{x0} - \sigma_y)^2}{\frac{2\gamma_0 \pi^2\, \mathfrak{Cotg}\, \gamma_0}{(\sigma_{x0} - \sigma_y)} + \sigma_{x0} - \sigma_y - \pi^2}.$$

Speziell folgt für $\sigma_y = 0$ und damit $\sigma_{x0} = \pi^2, \gamma_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{3}$

$$\tau^2 = \sigma'_x \frac{\pi^3}{\sqrt{3}}\, \mathfrak{Tg}\, \frac{\pi\sqrt{3}}{2}.$$

In dieser ersten Annäherung bleibt $\varkappa$ unverändert. Der hinzutretende Schub bewirkt eben in erster Annäherung nur eine Verzerrung des Knickfeldes, eine Änderung der Wellenlänge dagegen erst in zweiter Ordnung.

Für $\sigma_y = \frac{\pi^2}{4}$ folgt $\sigma_{x0} = \frac{\pi^2}{2}$, $\quad \gamma_0\, \mathfrak{Cotg}\, \gamma_0 = 1$ und $\tau^2 = \sigma'_x \frac{\pi^4}{4(32 - 3\pi^2)}$, $\quad \varkappa = 0$.

Diese spezielle Lösung gilt streng (vgl. das Ende von Abschn. 3).

Eine entsprechende Näherungslösung läßt sich auch bei eingespannten Rändern gewinnen. Ihre Ableitung ist allerdings wesentlich komplizierter, da man die Minimalwerte von σ_x nicht in geschlossener Form angeben kann, sondern nur ihre Zahlenwerte. Prinzipiell verläuft die Rechnung aber genau wie bei frei-aufliegenden Rändern, so daß wir auf eine Wiedergabe hier verzichten können. In beiden Fällen erhält man eine Beziehung von der Form

$$\tau^2 = A\,(\sigma_{x_0} - \sigma_x)\,,$$

wobei σ_x jetzt den wirklichen Druck in Längsrichtung bedeutet. Der Faktor A hängt nur von σ_y ab. In der Tabelle III ist er für eine Reihe von Werten von σ_y eingetragen. Mit

Tabelle III.

a) eingespannte Ränder							b) frei-aufliegende Ränder						
σ_y	A	σ_{x_0}	$\varkappa_0 = \varkappa^*$	τ^*	$\varkappa$	τ	σ_y	A	σ_{x_0}	$\varkappa_0 = \varkappa^*$	τ^*	$\varkappa$	τ
0	28,802	17,200	2,379	22,26	2,00	22,0	0	4,2127	9,8696	1,5708	13,23	1,42	13,00
3	24,251	15,486	2,174	19,38	1,74	19,2	0,8	4,0047	8,9916	1,4242	12,01	1,25	11,95
6	19,468	13,313	1,902	16,10	1,54	15,9	1,6	3,7502	7,8606	1,2095	10,51	1,02	10,48
9	13,491	9,813	1,314	11,50	1,14	11,3	2,4	3,3294	5,7504	0,6386	7,98	0,50	7.97
π^2	9,870	6,580	0	8,06	0	8,06	$\frac{\pi^2}{4}$	3,1912	4,9348	0	7,09	0	7,09

τ^* und $\varkappa^*$ sind die Werte von τ und $\varkappa$ bezeichnet, die sich auf Grund der Näherungsformel für $\sigma_x = 0$, also für verschwindenden Längsdruck ergeben. In den Nachbarkolonnen sind die Werte von τ und $\varkappa$ eingetragen, die sich auf Grund einer Interpolation aus den im Abschn. 3 berechneten Werten als kleinster Schub mit zugehörigem $\varkappa$ ergeben. Diese Werte sind natürlich auch noch mit den unvermeidlichen Interpolationsfehlern behaftet, die besonders bei den Werten von $\varkappa$ ziemlich erheblich ausfallen dürften. Die Übereinstimmung der beiden Werte des kritischen Schubes ist so gut, wie man es nur wünschen kann, die Übereinstimmung der $\varkappa$-Werte bei Berücksichtigung der Interpolationsverfälschung, die bei den $\varkappa$-Werten wohl um eine Größenordnung höher ist als bei den τ-Werten (das Minimum verläuft außerordentlich flach) ist auch noch erträglich.

Aus diesem Ergebnis können wir schließen, daß unsere Näherungsformel im ganzen Gebiet der kombinierten Druck- und Schub-Beanspruchung die kritischen Lasten mit praktisch mehr wie ausreichender Genauigkeit zu berechnen gestattet, da sie selbst in dem äußersten Grenzfall reiner Schubbeanspruchung noch die kritische Last innerhalb einer Fehlergrenze von 2 % liefert. Um ganz sicher zu gehen, wurde übrigens auch noch der Fall Längsdruck und Schub, also $\sigma_y = 0$, streng durchgerechnet und die Resultate mit den Werten auf Grund der Näherungsformel verglichen. Das Resultat entsprach den Erwartungen: die Abweichungen nahmen mit wachsendem τ allmählich zu, blieben aber immer unter der obigen Fehlergrenze von 2 %.

Die Knicklasten des Plattenstreifens bilden eine untere Grenze für Platten endlicher Länge, deren Längsseiten ebenso gelagert sind wie der Streifen. Die wirklichen Knicklasten solcher Platten müssen natürlich größer sein, immerhin dürften aber die Abweichungen bei nicht zu ungünstigem Seitenverhältnis nicht allzu groß sein, so daß unsere Knickformel auch hier brauchbare Resultate geben dürfte. 536

Zur Berechnung des Reibungsschwingungsdämpfers.

Von *Fritz Söchting* in Wien.

Zur Berechnung des Reibungsschwingungsdämpfers liegt das Verfahren von J. Ormondroyd [1]) bzw. G. Jendrassik [2]) vor. Bei diesem Verfahren wird das Reibungsglied konstant und die Schwingungsbewegung sinusförmig angenommen. Sie untersuchen nur die Dämpfung auf der Kraftseite und erhalten um 40% höhere Werte für das Dämpfungsmoment, als theoretisch erforderlich ist.

Das folgende Verfahren ermittelt für ein Zweimassensystem ohne diese Vereinfachungen bei gegebener Massenverteilung das Reibungsmoment für den Kleinstwert der Ausschläge und damit der Beanspruchungen.

Gegeben sei ein Zweimassensystem mit den Trägheitsmomenten I_1, I_2, der Federkonstante c und dem auf I_1 wirkenden erregenden Moment $P \sin \omega t$. Wenn der Dämpfer mit dem Trägheitsmoment I_3 durch das Reibungsmoment M mit dem Zweimassensystem gekoppelt ist, so sei ω die Eigenfrequenz der neuen Massenanordnung.

1. Bestimmung des Dämpfungsmomentes.

Es sind zwei Fälle möglich, je nachdem ob der Dämpfer auf der Kraftseite (der Stelle I, vgl. Abb. 1a) oder auf der Lastseite (Stelle II, vgl. Abb. 1b) wirkt.

a) Der Dämpfer wirkt auf der Kraftseite.

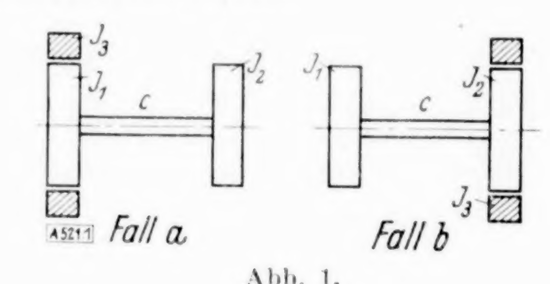


Abb. 1.

Für diesen Fall lauten die Differentialgleichungen der Bewegung

$$\left.\begin{aligned} & I_3 \ddot{\varphi}_3 \mp M = 0 \\ & I_1 \ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) \pm M = P \sin \omega t \\ & I_2 \ddot{\varphi}_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Aus diesem Gleichungssystem (1) erhält man durch Differentiieren

$$\left.\begin{aligned} & I_1 \dddot{\varphi}_1 + c(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = \omega P \cos \omega t \\ & I_2 \dddot{\varphi}_2 + c(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Wie man aus Gl. (2) ersieht, fällt die kritische Drehzahl der gedämpften Schwingung mit der der ungedämpften zusammen [3]).

$$\omega^2 = \frac{c(I_1 + I_2)}{I_1 I_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Aus Gl. (2) ist φ_1 eliminierbar, und unter Berücksichtigung von Gl. (3) erhält man

$$\varphi_2^{(V)} + \omega^2 \dddot{\varphi}_2 = \frac{P c \omega}{I_1 i_2} \cdot \cos \omega t \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

und nach zweimaligem Differentiieren

$$\varphi_2^{(VI)} + \omega^2 \dddot{\varphi}_2 = -\frac{P c \omega^3}{I_1 I_2} \cdot \cos \omega t .$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man das Kosinusglied eliminieren

$$\varphi_2^{(VII)} + 2 \omega^2 \varphi_2^{(V)} + \omega^4 \dddot{\varphi}_2 = 0 .$$

Die charakteristische Gleichung lautet dazu

$$\lambda^3 (\lambda^2 + \omega^2)^2 = 0 .$$

[1]) J. Ormondroyd: Friction Dampers and their Application to Engines. Verhandlungen des 3. Internationalen Kongresses für Technische Mechanik in Stockholm, III. Teil, S. 221, Stockholm 1930.

[2]) G. Jendrassik: Theorie des Reibungsschwingungsdämpfers, VDI 1933, S. 1009.

[3]) H. Frahm: Neue Untersuchungen über die dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen von Schiffsmaschinen mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzschwingungen, VDI 1902, S. 797 und S. 880.

Daher lautet die Lösung für φ_2

$$\varphi_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2 + (E_2 + F_2 t) \sin \omega t + (G_2 + H_2 t) \cos \omega t \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Die Konstanten C_2, F_2 und H_2 bestimmen sich aus der Differentialgleichung (4) zu

$$C_2 = \mp \frac{M}{2(I_1 + I_2)}, \qquad F_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad H_2 = \frac{P}{2\omega(I_1 + I_2)}.$$

Es ist also

$$\varphi_2 = A_2 + B_2 t \mp \frac{M t^2}{2(I_1 + I_2)} + E_2 \sin \omega t + \left(G_2 + \frac{P t}{2\omega(I_1 + I_2)}\right) \cos \omega t \quad \ldots \quad (5\text{a}).$$

Ist φ_2 bekannt, so bestimmt sich φ_1 aus einer der Gl. (1), und φ_3 wird durch Integration aus der ersten Gl. (1) gefunden. Von Interesse ist aber nur die Differenz ξ der beiden Ausschläge φ_1 und φ_2, von der die Beanspruchung der Welle abhängt. Es ist nach Gl. (1)

$$\left.\begin{aligned} \xi = (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{I_2}{c} \ddot{\varphi}_2 = \mp \frac{I_2 M}{c(I_1 + I_2)} - \frac{I_2}{c}\left(E_2 \omega^2 + \frac{P}{I_1 + I_2}\right) \cdot \sin \omega t \\ - \frac{I_2}{c}\left(G_2 \omega^2 + \frac{P \omega t}{2(I_1 + I_2)}\right) \cos \omega t \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6).$$

Die Werte der Konstanten E_2 und G_2 bestimmen sich aus den vorgegebenen Anfangsbedingungen und gelten nur solange, als das Reibungsmoment sein Vorzeichen nicht wechselt. Der Vorzeichenwechsel des Reibungsmomentes fällt mit dem der Relativgeschwindigkeit $\dot{\zeta}$ der Dämpfermasse I_3 gegenüber der Masse I_1

$$\dot{\zeta} = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3$$

zusammen. Es sei nun angenommen, daß der Vorzeichenwechsel von $\dot{\zeta}$ immer nach $\omega t = \pi$ stattfindet[4]), daher gelten die Werte der Konstanten in (6) nur während einer Zeitdauer $\tau = \frac{\pi}{\omega}$ und sind dann jedesmal von neuem zu bestimmen. Es ist bei $t_0 = 0$

$$\xi_0 = \mp \frac{I_2 M}{c(I_1 + I_2)} - \frac{I_2}{c} G_2 \omega^2 \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

und bei $\omega t_1 = \pi$

$$\xi_1 = \mp \frac{I_2 M}{c(I_1 + I_2)} + \frac{I_2}{c} G_2 \omega^2 + \frac{I_2 2\pi P}{2c(I_1 + I_2)} \quad \ldots \ldots \quad (7\text{a}).$$

Sollen nun die Beanspruchungen und damit die Relativverdrehungen nicht zu groß werden, dann darf für den Grenzfall, bei welchem die Ausschläge gerade noch endlich bleiben, $\xi_1 = -\xi_0$ sein und aus den Gl. (7) und (7a) erhält man für das Reibungsmoment den Wert

$$M = \frac{\pi}{4} P \quad \ldots \ldots \quad (8),$$

der ein Zugroßwerden der Beanspruchung verhindert, die Ausschläge bleiben endlich, trotzdem die Frequenz der erregenden Kraft gleich der der Eigenfrequenz ist.

---

[4]) Diese Annahme ist nicht nötig. Tatsächlich ist nach der ersten Gl. (1)

$$\varphi_3 = A_3 + B_3 t \pm \frac{M t^2}{2 I_3}$$

und nach Gl. (1) und Gl. (5a)

$$\varphi_1 = \frac{I_2}{c} \ddot{\varphi}_2 + \varphi_2 = A_2 \mp \frac{M I_2}{c(I_1 + I_2)} + B_2 t \mp \frac{M t^2}{2(I_1 + I_2)} - \left(\frac{I_2}{I_1} E_2 + \frac{P I_2}{c(I_1 + I_2)}\right) \sin \omega t - \frac{I_2}{I_1}\left(G_2 + \frac{P t}{2\omega(I_1 + I_2)}\right) \cos \omega t,$$

damit wird

$$\dot{\zeta} = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3 = B_2 - B_3 \mp M t \frac{I_1 + I_2 + I_3}{(I_1 + I_2) I_3} - \left[\frac{I_2}{I_1} \omega E_2 + \frac{P I_2 \omega (2 I_1 + 3 I_2)}{c(I_1 + I_2)^2}\right] \cdot \cos \omega t + \frac{I_2}{I_1}\left(G_2 + \frac{P t}{2\omega(I_1 + I_2)}\right) \omega \sin \omega t \quad (6\text{a}).$$

Die Konstanten der Gl. (6a) bestimmen sich aus den vorgegebenen Anfangsbedingungen. Es sei bei $t_0 = 0$, $\dot{\zeta}_0 = 0$, dann lautet Gl. (6a)

$$\dot{\zeta} = \mp M t \frac{I_1 + I_2 + I_3}{(I_1 + I_2) I_3} + \frac{I_2}{I_1} \omega E_2 (1 - \cos \omega t) + \frac{P I_2 \omega (2 I_1 + 3 I_2)}{c(I_1 + I_2)^2}(1 - \cos \omega t) + \frac{I_2}{I_1}\left(G_2 + \frac{P t}{2\omega(I_1 + I_2)}\right) \omega \sin \omega t \quad \ldots \quad (6\text{b}).$$

Der nächste relative Stillstand, bis zu welchem die Werte der Gl. (6), Gl. (6b) gelten, ist aus Gl. (6b) zu ermitteln. Für das nächste Intervall sind nun zufolge des Zeichenwechsels von M die Werte der Konstanten neuerlich zu bestimmen.

Will man untersuchen, wie groß E_2, G_2 und die Zeitdauer von einem relativen Stillstand bis zum nächsten, bei gegebenen Anfangsverhältnissen nach sehr langer Zeit werden, dann müßte man den Grenzwert bestimmen, der sich nur sehr umständlich ermitteln läßt. Diese Grenzwertbestimmung kann umgangen werden, wenn die Anfangswerte so gewählt werden, daß der Vorzeichenwechsel immer nach einer Zeitdauer $\omega \tau = \pi$ stattfindet. Bei der besonderen Annahme $\dot{\zeta} = 0$ bei $\omega \tau = \pi$ wird

$$E_2 = \frac{M \pi (I_1 + I_2 + I_3) I_1}{2\omega^2 (I_1 + I_2) I_2 I_3} - \frac{P(2 I_1 + 3 I_2) I_1}{c(I_1 + I_2)^2}.$$

Der Wert für M nach Gl. (8) bedingt die kleinste Relativverdrehung; denn für jeden Wert, der kleiner als $\frac{\pi}{4} P$ ist, wachsen die Größtausschläge nach Gl. (7) und (7a) immer mehr und mehr an. Aber auch für jeden größeren Wert von M sind die Relativverdrehungen größer; denn ist die Frequenz $k \neq \omega$ und ist $\dot{\zeta} = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3 = 0$, das heißt, die Bewegung von I_3 ist die von I_1, so wird bei Vergrößerung des Koppelmomentes M auch der Ausschlag φ_1 vergrößert, bei welchem der Dämpfer zu wirken beginnt, weil bei der ungedämpften Schwingungsbewegung $\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_3$ proportional dem Ausschlag ist.

b) Der Dämpfer wirkt an der Lastseite.

Für diesen Fall gelten die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) &= P \sin t \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) \pm M &= 0 \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 \mp M &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Differentiiert man Gl. (9) nach der Zeit, so erhält man Gl. (2) und für die kritische Drehzahl wieder Gl. (3), das ist die der ungedämpften Schwingung. Als Lösung für φ_2 erhält man ebenfalls Gl. (5). Die Werte der Konstanten C_2, F_2, H_2 bestimmen sich aber jetzt mittels der Gl. (9) zu

$$C_2 = \mp \frac{M}{2(I_1 + I_2)}, \qquad F_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad H_2 = \frac{P}{2\omega(I_1 + I_2)}.$$

Dies sind aber die gleichen Werte wie bei der Dämpfung auf der Kraftseite, so daß man als Lösung des Gleichungssystems (9) wieder Gl. (5a) bekommt. Für die Relativverdrehung ξ erhält man

$$\left.\begin{aligned} \xi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I_2}{c}\ddot{\varphi}_2 \pm \frac{M}{c} = \pm \frac{M I_1}{c(I_1 + I_2)} - \frac{I_2}{c}\left(E_2 \omega^2 + \frac{P}{I_1 + I_2}\right) \cdot \sin \omega t \\ - \frac{I_2}{c}\left(G_2 \omega^2 + \frac{P t}{2(I_1 + I_2)}\right) \cos \omega t \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10).$$

Die Konstanten der Gl. (10) gelten nur von einem Zeichenwechsel der Relativgeschwindigkeit $\dot{\zeta}$ bis zum nächsten und bestimmen sich aus den vorgegebenen Anfangsbedingungen. Es sei nun wieder wie früher die Annahme getroffen, daß $\dot{\zeta}$ bei $\omega t = 0, \pi, \ldots$ zu Null wird. Dann bestimmen sich die Relativverdrehungen bei $t_0 = 0$

$$\xi_0 = \pm \frac{M I_1}{c(I_1 + I_2)} - \frac{I_2}{c} G_2 \omega^2$$

und bei $\omega t_1 = \pi$

$$\xi_1 = \pm \frac{M I_1}{c(I_1 + I_2)} + \frac{I_2}{c}\left(G_2 \omega^2 + \frac{P \pi}{2(I_1 + I_2)}\right).$$

Sollen die Ausschläge endlich bleiben, dann darf ξ_1 höchstens gleich $-\xi_0$ werden. Dies ist dann der Fall, wenn

$$M = \frac{I_2}{I_1} \frac{\pi}{4} P \quad \text{ist.}$$

2. Berechnung des Dämpferträgheitsmomentes I_3.

a) Der Dämpfer wirkt auf der Kraftseite.

Um I_3 zu bestimmen, sei angenommen, daß $\dot{\zeta} = 0$ sei und daß die Frequenz k der erregenden Kraft nicht mit ω zusammenfällt. Dann gelten

$$\begin{aligned} (I_1 + I_3)\ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) &= P \sin k t, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0. \end{aligned}$$

Daraus bestimmt sich [3]) bei Vernachlässigung der Eigenschwingung

$$\varphi_3 = \varphi_1 = A_1 + B_1 t + \varepsilon_1.$$

Dabei ist die Pulsation ε_1

$$\varepsilon_1 = \frac{P(c - I_2 k^2)}{k^2 \left[(I_1 + I_3) I_2 k^2 - c(I_1 + I_2 + I_3)\right]} \sin k t.$$

Dies gilt aber wegen der Reibungskopplung nur so lange, als

$$|I_3 \ddot{\varphi}_3| \leq |M| \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

ist. Nun ist $\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_3 = -k^2 \varepsilon_1$, daher gelten auch die Ungleichungen

$$|I_3 k^2 \varepsilon_1| \leq |M| \qquad \text{bzw.} \qquad \left|\frac{P I_3 (c - I_2 k^2) \sin k t}{(I_1 + I_3) I_2 k^2 - c(I_1 + I_2 + I_3)}\right| \leq |M| \quad \ldots \quad (12).$$

Nimmt man nun an, daß das Gleichheitszeichen gerade noch bei $k\,t = \frac{\pi}{2}$ gilt und die Pulsation $\varepsilon_1 = \alpha$ vorgeschrieben ist, bei welcher der Dämpfer zur Wirkung kommen soll, so bestimmt sich nach Gl. (12) das I_3 aus der Gleichung

$$\alpha = \frac{M}{I_3}\frac{I_2}{c}\left(1 - \frac{M\,I_2}{M\,(I_1 + I_2 + I_3) + P\,I_3}\right).$$

Ist I_3 gegenüber I_1 und I_2 vernachlässigbar, so wird

$$I_3 \doteq \frac{I_2}{\alpha}\,\frac{I_1}{I_1 + I_2}\,\frac{M}{c} = \frac{M}{\alpha\,\omega^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

b) Der Dämpfer wirkt auf der Lastseite.

Dann gelten unter den obigen Annahmen die Differentialgleichungen

$$I_1\,\ddot{\varphi}_1 + c\,(\varphi_1 - \varphi_2) = P \sin k\,t,$$
$$(I_2 + I_3)\,\ddot{\varphi}_2 + c\,(\varphi_2 - \varphi_1) = 0\,.$$

Dann ist wieder unter Vernachlässigung der Eigenschwingung

$$\varphi_3 = \varphi_2 = A_2 + B_2\,t + \varepsilon_2$$

und

$$\varepsilon_2 = \frac{P\,c \sin k\,t}{k^2\,[k^2\,I_1\,(I_2 + I_3) - c\,(I_1 + I_2 + I_3)]}.$$

Es gilt wieder Gl. (11), nur ist jetzt

$$\ddot{\varphi}_3 = \ddot{\varepsilon}_2 = -\,k^2\,\varepsilon_2\,.$$

Soll nun die Relativverschiebung von I_3 gegenüber I_2 bei $k\,t = \frac{\pi}{2}$ erfolgen und sei dann die Pulsation $\varepsilon_2 = \beta$, so bestimmt sich das zugehörige I_3 aus der folgenden Gleichung

$$\beta = \frac{M}{I_3}\,\frac{M\,I_1\,(I_2 + I_3)}{M\,c\,(I_1 + I_2 + I_3) + P\,c\,I_3}.$$

Ist nun I_3 wieder gegenüber I_1 und I_2 vernachlässigbar, so erhält man die einfache Beziehung

$$I_3 \doteq \frac{M}{\beta\,\omega^2}\,.$$

3. Vergleich der Ergebnisse des obigen Verfahrens mit dem von J. Ormondroyd.

Ormondroyd untersucht nur den Fall der Dämpfung auf der Kraftseite und erhält für das Dämpfungsmoment

$$M = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\,P,$$

also einen um ca. 40% größeren Wert als nach Gl. (8), und für das Trägheitsmoment des Dämpfers

$$I_3 = \frac{M}{\alpha\,\omega^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

ebenfalls einen größeren Wert als nach Gl. (13).

Wird der Dämpfer nach den Angaben von J. Ormondroyd entworfen, so ist die Gewähr gegeben, daß die Ausschläge endlich bleiben.

Zusammenfassung.

Es wird für ein Zweimassensystem, auf das ein Reibungsschwingungsdämpfer wirkt, jenes Dämpfungsmoment berechnet, bei dem die Relativverdrehungen und damit die Beanspruchungen endlich bleiben, wenn eine erregende Kraft $P \sin \omega\,t$ mit der Frequenz ω gleich der der Eigenschwingung auf das System wirkt und keine Flüssigkeitsdämpfung vorhanden ist. Außerdem wird der Zusammenhang zwischen dem Dämpferträgheitsmoment und dem Winkelausschlag angegeben. Untersucht wurden die beiden möglichen Fälle (der Dämpfer wirkt auf der Kraftseite oder auf der Lastseite.

Der Einfluß von Schwingungen des Staurohrs oder von Geschwindigkeitsschwankungen auf die Staudruckanzeige.

Von *Georg Kiel.*

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.

I. Einleitung.

Es treten zuweilen Versuchsbedingungen auf, bei denen die Staudruckanzeige entweder durch Geschwindigkeitsschwankungen oder — was auf das gleiche herauskommt — durch Schwingungen des Staugeräts gefälscht werden kann. Bei genauen Staudruckmessungen außerhalb der Spannweite eines Flugzeugs, die der Verfasser im Fluge durchführte, traten unter ungünstigen Versuchsbedingungen am äußersten Ende der Meßeinrichtung (in einem Abstand von 2,9 m vom Flügelende) Schwingungen von erheblicher Amplitude und Frequenz auf. Der hierdurch entstehende Fehler in der Staudruckanzeige erhielt hierbei besondere Bedeutung. Da nun die Frage nach dem Einfluß von Schwingungen des Staurohrs oder von Geschwindigkeitsschwankungen auf die Staudruckanzeige öfter auftaucht und ganz allgemein interessiert, soll sie im folgenden theoretisch und versuchsmäßig näher untersucht werden

II. Formelzeichen.

v	[m/s]	Geschwindigkeit,
v_0	[m/s]	zeitlich unveränderliche Geschwindigkeit, bzw. zeitlich unveränderlicher Mittelwert der Geschwindigkeit,
v_s	[m/s]	Geschwindigkeitsschwankung in Strömungsrichtung von v_0,
v_y	[m/s]	Geschwindigkeitsschwankung senkrecht zur Strömungsrichtung von v_0,
$q = {}^1/_2 \cdot \varrho\, v^2$	[kg/m²]	Staudruck,
$q_0 = {}^1/_2 \cdot \varrho\, v_0^2$	[kg/m²]	der aus der zeitlich unveränderlichen Geschwindigkeit v_0 resultierende Staudruck,
q_a	[kg/m²]	angezeigter Staudruck-Mittelwert,
q'	[kg/m²]	bei Schwingungen senkrecht zur Strömungsrichtung resultierender Staudruck, wenn der Einfluß der dabei entstehenden Schräganströmung vernachlässigt wird,
p_g	[kg/m²]	Gesamtdruck,
p	[kg/m²]	statischer Druck,
a	[m]	Amplitude der Schwingung,
$\omega = 2\pi f$	[Hz]	Kreisfrequenz,
f	[Hz]	Frequenz der Schwingung,
t	[s]	Zeit,
T	[s]	Schwingungsdauer,
σ	[Grad]	Schräganströmwinkel.

III. Theoretische Betrachtung über die Staudruckanzeige bei Geschwindigkeitsschwankungen oder Schwingungen des Staurohrs.

1. Staudruckanzeige bei Schwingungen in Strömungsrichtung. Es sei zunächst angenommen, daß ein Staurohr, das sich in einer Strömung von unveränderlicher Geschwindigkeit befindet, Schwingungen in Strömungsrichtung ausführt. Relativ zum Staugerät schwankt dann die Geschwindigkeit v um einen zeitlich unveränderlichen Mittelwert v_0. Abb. 1 gibt die Geschwindigkeitsverhältnisse wieder. Die Geschwindigkeitsschwankung v_s sei als Funktion der Zeit gegeben, also $v_s(t)$. Es ist dann die Geschwindigkeit

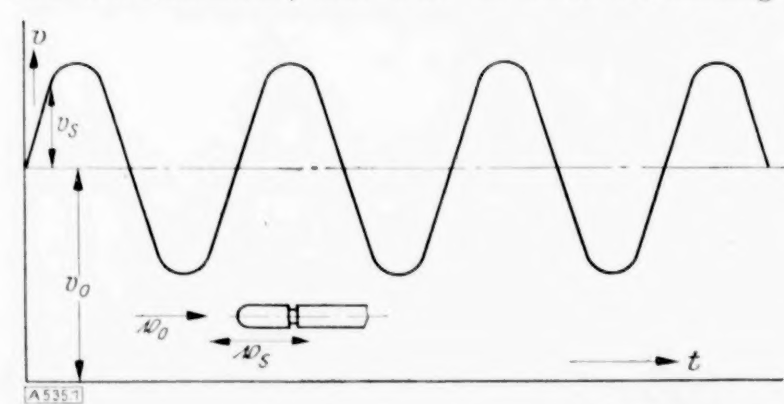


Abb. 1. Zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeit bei Schwingungen in Strömungsrichtung.

$$v = v_0 + v_s(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Trägheitsfreie Geschwindigkeitsmeßgeräte zeigen den wahren zeitlichen Geschwindigkeitsverlauf an. Das gleiche gilt bei trägheitsfreien Staudruckmeßgeräten beim Staudruck. Sind nun aber die Trägheitskräfte nicht vernachlässigbar klein, so ist die Anzeige bei Geschwindigkeitsschwankungen durch die Abhängigkeit des Meßgerätes von der Geschwindigkeit bedingt.

Die Anzeige von Staudruckmeßgeräten nach dem Differenzdruckverfahren (Staurohre) ist infolge der Beziehung

$$q = p_g - p = \frac{\varrho\, v^2}{2},$$

proportional dem Geschwindigkeitsquadrat. Trägheitsbehaftete Staugeräte können also im günstigsten Fall nur den zeitlichen Mittelwert des Geschwindigkeitsquadrates anzeigen. Unter Zugrundelegung von Gl. (1) ist

$$q = \frac{\varrho\, v^2}{2} = \frac{\varrho}{2}\left[v_0^2 + 2\, v_0\, v_s(t) + (v_s(t))^2\right] \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Für den vom Meßgerät angezeigten zeitlichen Mittelwert des Staudrucks ergibt sich nun:

$$q_a = \frac{\varrho}{2\,T}\int_0^T v^2\, dt = \frac{\varrho}{2}\left(v_0^2 + \frac{2\, v_0}{T}\int_0^T v_s(t)\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T [v_s(t)]^2\, dt\right).$$

Das Integral $\frac{1}{T}\int_0^T v_s(t)\, dt$, der zeitliche Mittelwert der Geschwindigkeitsschwankung v_s, über eine genügend lange Zeit T genommen, hat den Wert Null, wie auch aus Abb. 1 ersichtlich ist. Es ist also der angezeigte Staudruckmittelwert

$$q_a = \frac{\varrho}{2}\left(v_0^2 + \frac{1}{T}\int_0^T [v_s(t)]^2\, dt\right) \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Der Wert des Integrals $\frac{\varrho}{2\,T}\int_0^T [v_s(t)]^2\, dt$ stellt den Fehler der Staudruckanzeige dar. Dieser Fehler ist stets positiv, weil der Integrand nur quadratisch vorkommt. Dies gilt jedoch nur unter der einschränkenden Voraussetzung, daß das Druckanzeigegerät die Mittelwertbildung für das Geschwindigkeitsquadrat auch richtig durchführt. Durch Leitungskapazität oder Drosseln kann diese Mittelwertbildung gefälscht werden. Derartige Einflüsse sollen aber bei der vorliegenden Untersuchung vernachlässigt werden. Es ist also unter dieser Voraussetzung stets

$$q_a > q_0 \text{ bzw. } > \frac{\varrho\, v_0^2}{2},$$

d. h., der bei Geschwindigkeitsschwankungen vom Staugerät angezeigte Staudruck q_a ist immer größer als der aus dem zeitlich unveränderlichen Geschwindigkeitsmittelwert resultierende Staudruck $q_0 = \frac{\varrho\, v_0^2}{2}$. Der hier behandelte Fall tritt auf, wenn ein Staugerät um seine Mittellage Schwingungen in Strömungsrichtung ausführt.

Die Aufgabe besteht nun darin, den Wert des Integrals $\frac{1}{T}\int_0^T [v_s(t)]^2\, dt$ zu ermitteln. Den wirklichen Verhältnissen wird man am nächsten kommen, wenn für die Geschwindigkeitsschwankung ein sinusförmiger Verlauf angenommen wird. Unter der Annahme einer Sinusschwingung läßt sich die Funktion $v_s(t)$ in der Form schreiben:

$$v_s = a\, \omega \sin \omega\, t \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Hierbei ist

a	[m]	die Amplitude der Schwingung,
$\omega = 2\,\pi f$	[Hz]	die Kreisfrequenz, (f [Hz] Frequenz der Schwingung),
t	[s]	die Zeit.

Unter Benutzung des Ausdrucks (4) ist dann das Fehlerglied

$$\frac{1}{T}\int_0^T [v_s(t)]^2\, dt = \frac{a^2\, \omega^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega\, t)\, dt = \frac{1}{2}\, a^2\, \omega^2 - \frac{1}{4}\,\frac{a^2\, \omega}{T} \sin 2\, \omega\, T \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Nimmt man an, daß bei der Staudruckanzeige der Mittelwert einer Schwingung $\left(\text{d. h. } T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$ oder ein Vielfaches davon angezeigt wird, so ergibt sich

$$\frac{1}{T}\int_0^{T=\frac{2\pi}{\omega}} [v_s(t)]^2\, dt = \frac{1}{2}\, a^2\, \omega^2 .$$

Wird nun an Stelle der Kreisfrequenz ω die Frequenz der Schwingung $f = \frac{\omega}{2\pi}$ eingeführt, so nimmt das Fehlerglied die Form an:

$$\frac{1}{T}\int_0^{T=\frac{1}{f}} [v_s(t)]^2\, dt = 2\, a^2\, \pi^2 f^2 \quad \text{. . . . . (6).}$$

Somit ist die Staudruckfehlanzeige

$$q_a - q_0 = q_a - \frac{1}{2}\varrho\, v_0^2 = \varrho\, a^2\, \pi^2 f^2 \quad \text{. . . . . (7).}$$

Unter der Voraussetzung der richtigen Mittelwertbildung für das Geschwindigkeitsquadrat ist der absolute Betrag der Staudruckfehlanzeige demnach unabhängig von der Größe der jeweiligen mittleren Geschwindigkeit v_0 bzw. des daraus resultierenden mittleren Staudrucks $q_0 = \frac{1}{2}\varrho\, v_0^2$, er ist vielmehr nur abhängig von der Amplitude und Frequenz der Schwingungen. Abb. 2 gibt die Staudruckfehlanzeige $q_a - q_0$ bei verschiedenen Schwingungsamplituden a in Abhängigkeit von der Frequenz f wieder. Hierbei ist die Luftdichte $\varrho = \frac{1}{8}$ [kgs²/m⁴] angenommen. Um ein invariantes Schaubild zu erhalten, ist in Abb. 3 $q_a - q_0$ als Funktion von af dargestellt. Bezieht man den Fehler in der Staudruckanzeige auf den aus der mittleren Geschwindigkeit resultierenden Staudruck q_0 und setzt

$$\frac{q_a - q_0}{q_0} = \frac{2\, q_a}{\varrho\, v_0^2} - 1 = \frac{\varrho\, a^2\, \pi^2 f^2}{q_0} = \frac{2\, a^2\, \pi^2 f^2}{v_0^2} \quad \text{. . . . . (8),}$$

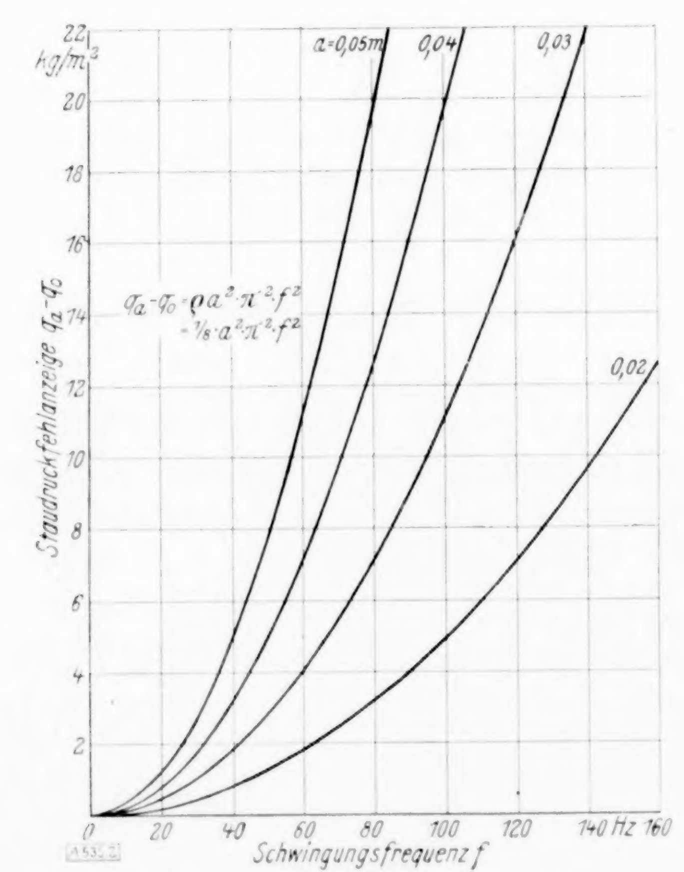


Abb. 2. Staudruckfehlanzeige $q_a - q_0$ in Abhängigkeit von der Schwingungsfrequenz f bei verschiedenen Amplituden a.

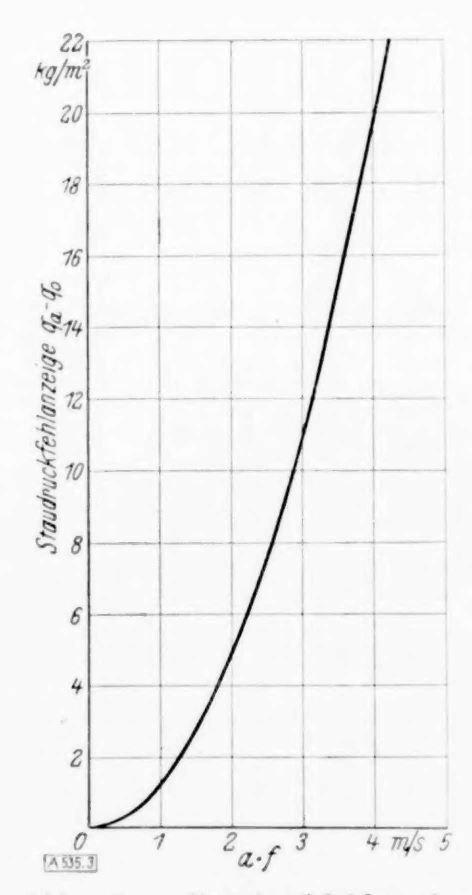


Abb. 3. Staudruckfehlanzeige $q_a - q_0$ in Abhängigkeit von $a \cdot f$.

so ist klar ersichtlich, daß der Einfluß der Staudruckfehlanzeige bei gleichbleibender Amplitude und Frequenz um so geringfügiger wird, je größer die mittlere Geschwindigkeit v_0 ist.

2. Staudruckanzeige bei Schwingungen senkrecht zur Strömungsrichtung. Es sei nun der Fall betrachtet, daß ein Staurohr senkrecht zur Strömungsrichtung, bzw. — was dasselbe ist — senkrecht zu seiner Symmetrieachse schwingt (vgl. Abb. 4). Zur wirklichen, zeitlich unveränderlichen Strömungsgeschwindigkeit v_0 kommt die zu dieser senkrecht gerichtete Geschwindigkeit v_y hinzu. v_y sei wiederum als Funktion der Zeit gegeben $[v_y(t)]$. Abb. 4 zeigt schematisch die Geschwindigkeitsverhältnisse. Es ist die am Staugerät vorhandene Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{v_0^2 + [v_y(t)]^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

Ein trägheitsfreies und vom Anströmwinkel unabhängiges Geschwindigkeitsmeßgerät würde den resultierenden Geschwindigkeitsverlauf von v nach Gl. (9) anzeigen (vgl. gestrichelte Kurve in Abb. 4). Das Mittel aus diesem Geschwindigkeitsverlauf entspricht dem zeitlichen Mittelwert der Geschwindigkeit relativ zum Staugerät (d. h. dem Mittelwert der resultierenden Geschwindigkeit aus v_0 und v_y) und ist infolge der zusätzlichen Geschwindigkeit v_y stets größer als die tatsächlich zu messende Geschwindigkeit v_0. Ähnliches gilt für den Staudruckverlauf, der sich unter Benutzung von Gl. (9) ergibt zu:

$$q' = \frac{1}{2} \varrho v^2 = \frac{\varrho}{2} [v_0^2 + (v_y(t))^2] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Ein trägheitsfreies und von der Anströmrichtung unempfindliches Staugerät würde den durch Gl. (10) dargestellten Staudruckverlauf anzeigen. Ist das Staugerät aber trägheitsbehaftet, so ist bei Vernachlässigung des Einflusses der Schräganströmung der vom Meßgerät günstigstenfalls angezeigte zeitliche Mittelwert des Staudrucks

$$q' = \frac{\varrho}{2} \left(v_0^2 + \frac{1}{T} \int_0^T [v_y(t)]^2 \, d t \right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Die nun erhaltene Gl. (11) ist identisch mit der für Schwingungen in Strömungsrichtung erhaltenen Gl. (3). Sieht man von der Empfindlichkeit des Staugeräts von der Schräganströmung ab, so wird man, unter der Voraussetzung der gleichen Schwingungsform, dieselbe Fehlanzeige erhalten, gleichgültig, ob die Schwingung in oder senkrecht zur Strömungsrichtung erfolgt. Da $q_0 = \frac{1}{2} \varrho v_0^2$ der zu messende Staudruck ist, stellt der Wert des Integrals

$$\frac{\varrho}{2T} \int_0^T [v_y(t)]^2 \, d t$$

die Staudruckfehlanzeige dar. Dieser Fehler ist unter Voraussetzung der früher getroffenen Annahme stets positiv.

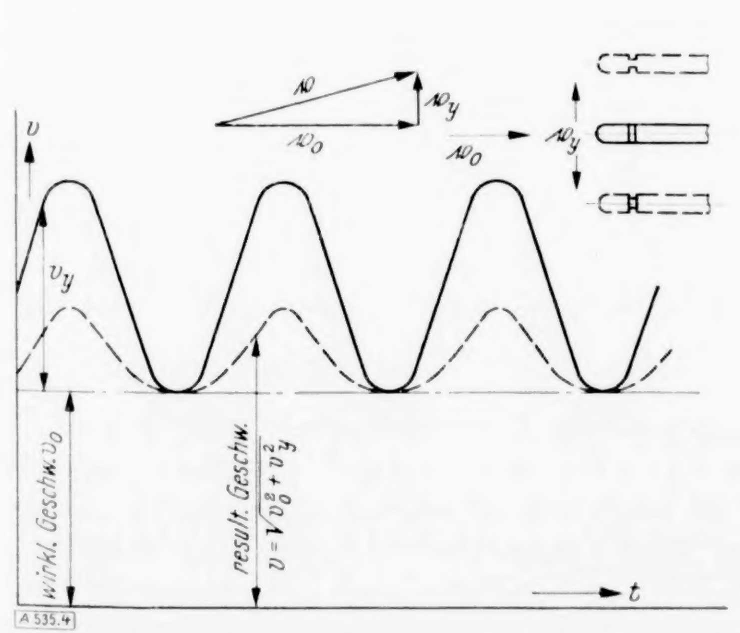


Abb. 4. Die Geschwindigkeitsverhältnisse beim senkrecht zur Strömungsrichtung schwingenden Staurohr.

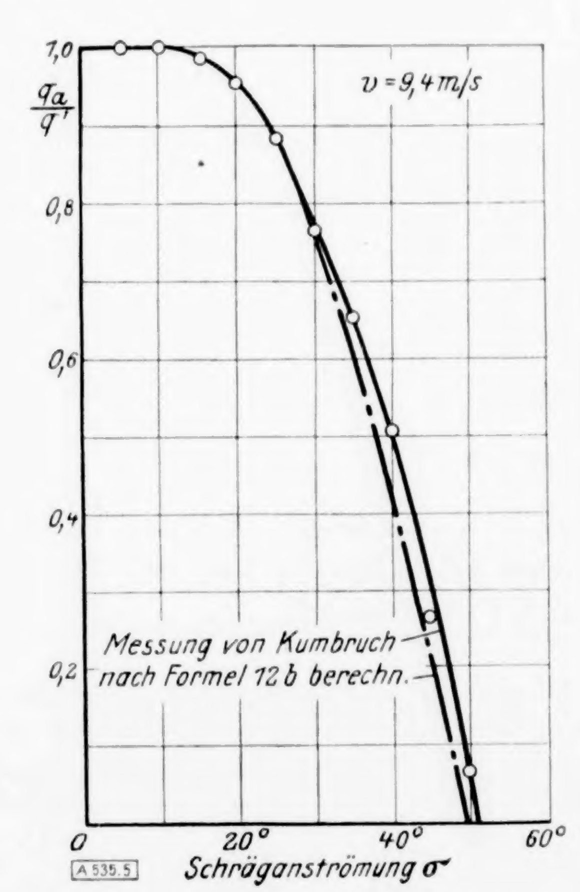


Abb. 5. Staudruckanzeige des Prandtlrohrs bei Schräganströmung.

Die Schwingung des Staurohrs senkrecht zur Strömungsrichtung bringt nun aber gleichzeitig auch eine sich periodisch ändernde Schräganströmung mit sich. Staurohre und Staudüsen zeigen bei größerer Schräganströmung einen zu kleinen Wert an. Soll die Fehlanzeige bei Schwingungen des Staurohrs allgemeingültig erfaßt werden, so ist Gl. (11) noch in der Weise zu erweitern, daß auch der Einfluß der Schräganströmung des Staugeräts miterfaßt wird. Im folgenden soll der Einfluß der Schräganströmung für das normale Prandtlrohr berücksichtigt werden. Abb. 5 zeigt die Abhängigkeit der Staudruckanzeige des normalen Prandtlrohrs von der Schräganströmung nach Messungen von Kumbruch[1]).

Um den Einfluß der Schräganströmung formelmäßig in Gl. (11) einführen zu können, soll die von Kumbruch gemessene Kurve durch eine Fourier-Reihe angenähert werden. Die abzuleitende Formel braucht die Verhältnisse nur über einen verhältnismäßig kleinen Schräganströmbereich zu erfassen. Bezeichnet q' den Staudruckwert, der unter dem Einfluß der Schwingungen, aber bei Vernachlässigung des Einflusses der Schräganströmung erhalten wird, q_a den bei Berücksichtigung des Schräganströmeinflusses angezeigten Staudruckmittelwert und σ den Anströmwinkel, so kann man setzen:

$$\frac{q_a}{q'} = C_1 \cos \sigma + C_3 \cos 3\sigma + C_5 \cos 5\sigma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12\text{a}).$$

Werden der gemessenen Kurve $\frac{q_a}{q'} = f(\sigma)$ je 3 einander zugehörige Werte für $\frac{q_a}{q'}$ und σ entnommen, so ergeben sich nach Auflösung der 3 Gleichungen für die einzelnen Konstanten folgende Werte:

$$C_1 = 0{,}64\,, \qquad C_3 = 0{,}61\,, \qquad C_5 = -0{,}25\,.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gl. (12a) und Berücksichtigung der trigonometrischen Beziehungen

$$\cos 3\sigma = \cos\sigma\,(4\cos^2\sigma - 3) \quad \text{und} \quad \cos 5\sigma = \cos\sigma\,(16\cos^4\sigma - 20\cos^2\sigma + 5)$$

ergibt sich

$$\frac{q_a}{q'} = -2{,}44\cos\sigma + 7{,}44\cos^3\sigma - 4\cos^5\sigma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12\text{b}).$$

In Abb. 5 ist die nach dieser Formel berechnete Kurve gestrichelt eingezeichnet. Die Übereinstimmung der gerechneten mit den von Kumbruch gemessenen Werten ist bis zu 30° Schräganströmung recht vollkommen. Größere Schräganströmungen interessieren praktisch nicht mehr.

Nun ist $\cos\sigma = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + [v_y(t)]^2}}$. Unter der Voraussetzung, daß in jedem Augenblick, wo der Anströmwinkel σ einen bestimmten Betrag σ_x erreicht, das Verhältnis $\frac{q_a}{q'}$ denselben Wert hat, den es bei über längere Zeit konstant gehaltenem σ_x besitzt, wird hiermit unter Berücksichtigung von Gl. (10) der angezeigte Staudruckmittelwert

$$q_a = \frac{\varrho\,v^2}{2}\left[-2{,}44\,\frac{v_0}{v} + 7{,}44\left(\frac{v_0}{v}\right)^3 - 4\left(\frac{v_0}{v}\right)^5\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

und

$$\frac{q_a}{q_0} = \frac{2\,q_a}{\varrho\,v_0^2} = \frac{v}{v_0}\left[-2{,}44 + 7{,}44\left(\frac{v_0}{v}\right)^2 - 4\left(\frac{v_0}{v}\right)^4\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14).$$

Hierbei ist

$$v = \sqrt{v_0^2 + [v_y(t)]^2}\,.$$

Wird für $v_y(t)$ wieder, wie weiter oben, eine Sinusschwingung angenommen und in Analogie zu Gl. (6)

$$\overline{v_y^2} = \frac{1}{T}\int_0^T [v_y(t)]^2\,dt = 2\,a^2\,\pi^2 f^2$$

gesetzt, so wird

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\,a^2\,\pi^2 f^2}\,.$$

[1]) H. Kumbruch: „Messung strömender Luft mittels Staugeräten." Forschungsarbeiten des VDI, Heft 240, 1921 (Abb. 18).

Für den Fall, daß $\frac{v_y}{v_0} \leqq 0{,}2$[2]), bzw. $\frac{a f}{v_0} \leqq 0{,}045$ ist, verschwindet, wie aus Abb. 5 zu ersehen ist, der Einfluß der Schräganströmung. Es gilt dann in gleicher Weise wie bei der Schwingung in Strömungsrichtung die einfache Formel

$$\frac{q_a}{q_0} = 1 + \left(\frac{v_y(t)}{v_0}\right)^2 = 1 + \frac{2\,a^2\,\pi^2 f^2}{v_0^{\,2}} .$$

Nach den bekannten Regeln der analytischen Geometrie läßt sich auf Grund von Gl. (14) leicht der erreichbare Höchstwert von $\frac{q_a}{q_0}$ berechnen. Durch Differentiation von Gl. (14) nach $\frac{v_0}{v}$ und Nullsetzen des für $\frac{d\,(q_a/q_0)}{d\,(v_0/v)}$ gefundenen Ausdrucks ergibt sich:

$$\frac{d\,(q_a/q_0)}{d\,(v_0/v)} = 2{,}44 + 7{,}44\left(\frac{v_0}{v}\right)^2 - 12\left(\frac{v_0}{v}\right)^4 = 0 .$$

Die Auflösung ergibt die zu $\left(\frac{q_a}{q_0}\right)_{\max}$ gehörigen Werte:

$$\left(\frac{v_0}{v}\right)^2 = 0{,}8572 \text{ bzw. } \frac{v_0}{v} = \pm\, 0{,}9258\text{[3]}) .$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gl. (14) ergibt sich

$$\left(\frac{q_a}{q_0}\right)_{\max} = 1{,}08 .$$

Der bei Schwingungen des Prandtlrohrs senkrecht zur Strömungsrichtung erreichbare Fehler kann also bei Zugrundelegung von Gl. (14) bei allen Amplituden und Frequenzen im ungünstigsten Fall höchstens 8 % q_0 betragen. Gleichzeitig läßt sich die Bedingung angeben, die beim Erreichen des Wertes $\left(\frac{q_a}{q_0}\right)_{\max}$ erfüllt sein muß. Nach dem Vorausgehenden ist der zu $\left(\frac{q_a}{q_0}\right)_{\max}$ gehörige Wert von

$$\left(\frac{v_0}{v}\right)^2 = \frac{v_0^{\,2}}{v_0^{\,2} + 2\,a^2\,\pi^2 f^2} = 0{,}8572 .$$

Durch Auflösen dieses Ausdrucks nach $\frac{a f}{v_0}$ ergibt sich

$$\frac{a f}{v_0} = 0{,}09187 \approx 0{,}092 .$$

Man erreicht also den Größtfehler

$$\left(\frac{q_a}{q_0}\right)_{\max} = 1{,}08, \quad \text{wenn} \quad \frac{a f}{v_0} = 0{,}092 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

ist.

Zur Veranschaulichung der Größe der zu erwartenden Staudruckfehlanzeige sind in Abb. 6 die bei verschiedenen Geschwindigkeiten ($v_0 = 20;\ 30;\ 40;$ [m/s]) für eine Amplitude von $a = 0{,}03$ m nach Gl. (14) berechneten Fehler $100\,\frac{q_a - q_0}{q_0}$ in Abhängigkeit von der Frequenz der Schwingung aufgetragen. Zum Vergleich sind gleichzeitig auch die einer Schwingung in Strömungsrichtung entsprechenden Kurven nach Gl. (8) gestrichelt eingezeichnet. Die Fehlerkurven weisen, was bereits nach Formel 15 vorausgesagt wurde, bei allen Geschwindigkeiten v_0 als größte Staudruckfehlanzeige 8 % q_0 auf.

[2]) $\sigma \lesseqqgtr 11{,}5^{0}$.

[3]) Die übrigen Wurzelwerte haben keinen Sinn, weil sie außerhalb des Geltungsbereiches der Gl. (14) liegen.

Ein allgemein gültiges Schaubild der Staudruckfehlanzeige, das gegen eine Änderung der Einzelgrößen invariant ist, wird erhalten, wenn die Staudruckfehlanzeige in Abhängigkeit von $\frac{a f}{v_0}$ dargestellt wird. Abb. 7 zeigt dieses Schaubild, in dem der Verlauf der Staudruck-

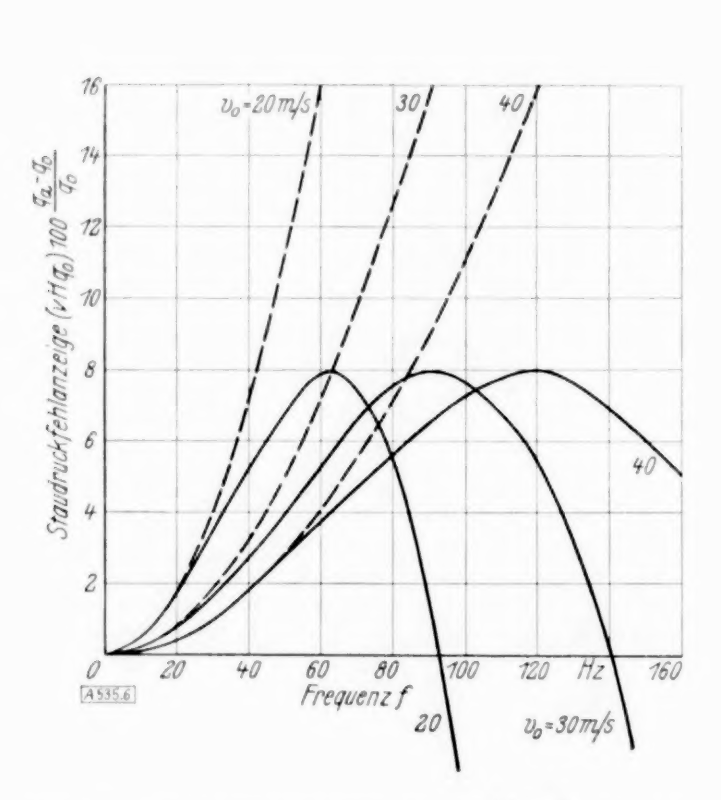
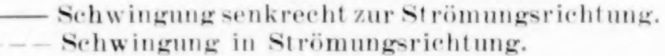


Abb. 6. Staudruckfehlanzeige $100 \frac{q_a - q_0}{q_0}$ in Abhängigkeit von der Frequenz f bei einer Amplitude von $a = 0{,}03$ m und verschiedenen Geschwindigkeiten v_0.



—— Schwingung senkrecht zur Strömungsrichtung.
– – – Schwingung in Strömungsrichtung.

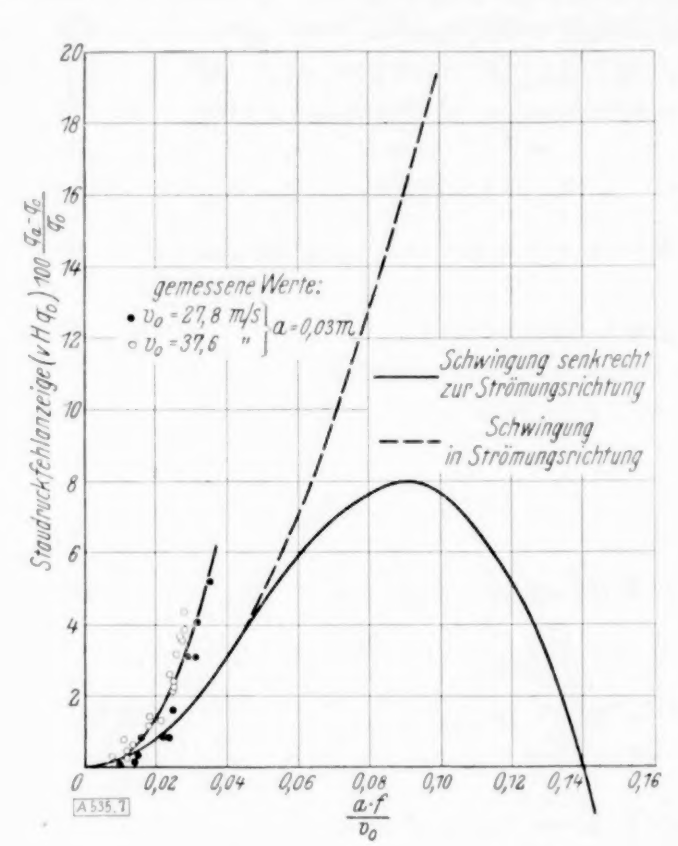


Abb. 7. Staudruckfehlanzeige $100 \frac{q_a - q_0}{q_0}$ als Funktion von $\frac{a \cdot f}{v_0}$.

fehlanzeige $\left(100 \frac{q_a - q_0}{q_0}\right)$ als Funktion von $\frac{a f}{v_0}$ sowohl für die Schwingung senkrecht zur Strömungsrichtung als auch für die in Strömungsrichtung dargestellt ist. Sind die jederzeit leicht meßbaren Größen Amplitude a [m], Frequenz f [Hz] und Geschwindigkeit v_0 [m/s] bekannt, so läßt sich ohne langwierige Rechnung durch Bildung des Ausdrucks $\frac{a f}{v_0}$ sofort die zu erwartende Staudruckfehlanzeige aus Abb. 7 ablesen. In Wirklichkeit werden wohl selten reine Schwingungen in Strömungsrichtung oder senkrecht dazu auftreten. Die beiden Kurven der Abb. 7 würden demnach Grenzkurven darstellen, zwischen denen die praktisch auftretenden Fehler zumeist liegen dürften.

IV. Ergebnis der Staudruckmessung mit einem senkrecht zur Strömungsrichtung schwingenden Prandtlrohr und Vergleich der gemessenen Staudruckfehlanzeige mit den berechneten Werten.

Die vorangegangenen theoretischen Betrachtungen setzten Sinusschwingungen des Staurohrs voraus und gingen weiterhin von der Annahme aus, daß bei der Staudruckanzeige infolge der Trägheit und Dämpfung der Mittelwert der Staudruckschwingung, also ein dem Mittelwert des Geschwindigkeitsquadrates proportionaler Betrag angezeigt wird. Um nun ein Bild über die Größe der tatsächlich praktisch auftretenden Fehlanzeige des Staudrucks zu bekommen, wurde diese für den Fall der Schwingung senkrecht zur Strömungsrichtung versuchsmäßig im Instrumenten-Windkanal der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt (DVL) bestimmt.

1. Versuchsanordnung und Versuchsdurchführung. In Abb. 8 ist die Versuchsanordnung schematisch dargestellt. Abb. 9 zeigt die in den Windkanal eingebaute Versuchseinrichtung im Lichtbild. Die zur Strömungsrichtung senkrechten Schwingungen des Prandtlrohrs wurden durch einen von einem Gleichstrom-Nebenschlußmotor angetriebenen Kurbelbetrieb erzeugt. Durch Einschalten entsprechender Widerstände in dem Nebenschluß konnte die Drehzahl und hiermit die Frequenz der Schwingungen weitgehend verändert werden. Als schwingendes

Staurohr wurde ein normales Prandtlrohr von 6 mm Durchmesser verwendet. Um einerseits ein Abbrechen des Prandtlrohrs infolge des bei den schnellen Schwingungen auftretenden Einspannmomentes zu verhüten und andererseits zusätzliche Eigenschwingungen des Prandtlrohrs so gut wie möglich zu vermeiden, wurde das Prandtlrohr nach der Einspannstelle zu konisch verstärkt.

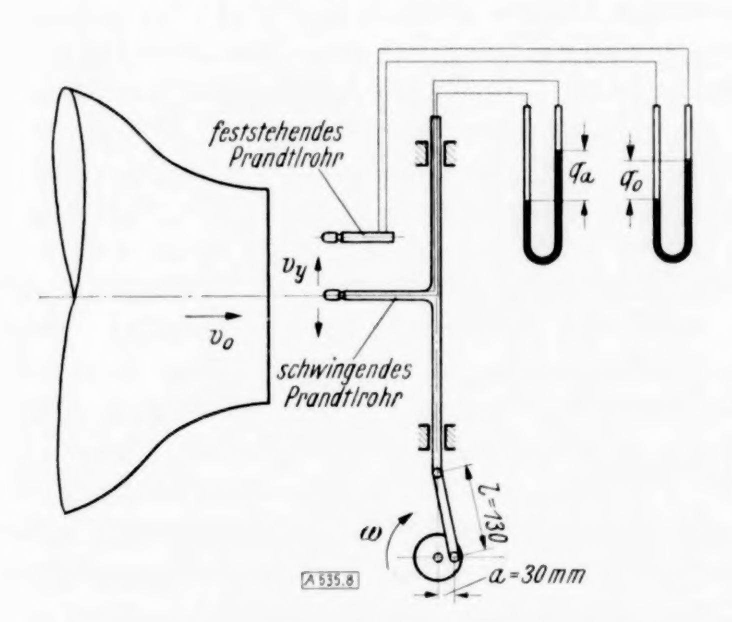


Abb. 8. Schema der Versuchsanordnung.

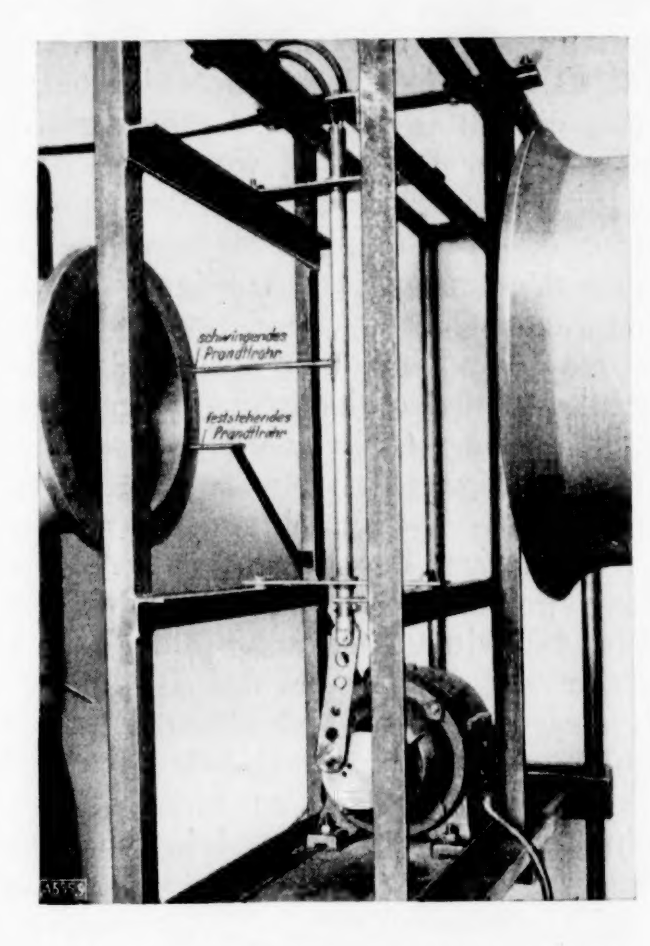


Abb. 9. Die in den Windkanal eingebaute Versuchseinrichtung.

Das Meßverfahren bestand darin, daß bei verschiedenen Drehzahlen des Motors, also verschiedenen Schwingungsfrequenzen des Prandtlrohrs, die Staudruckanzeige des schwingenden Prandtlrohrs q_a und gleichzeitig die eines feststehenden q_0 bestimmt wurde. Der Staudruck des Windkanals q_0 wurde während jeder Meßreihe, so gut es möglich war, konstant gehalten. Zur Staudruckmessung wurden Alkohol-Mikromanometer benutzt. Vor Beginn der Versuche wurde die Staudruckverteilung in dem Schwingungsbereich des schwingenden Prandtlrohrs bestimmt. Sie erwies sich als konstant.

2. Ergebnis der Messungen und Vergleich mit der Rechnung. Das Ergebnis der Messungen der Staudruckanzeige des schwingenden Prandtlrohrs ist in Abb. 10 wiedergegeben. Die Staudruckfehlanzeige ist in Prozenten des wirklichen Staudrucks als Funktion der Motordrehzahl bzw. der Frequenz der Schwingung aufgetragen $\left[100\,\frac{q_a - q_0}{q_0} = f(n) \text{ bzw. } = F(f)\right]$. Es wurden zwei Versuche durchgeführt, der eine bei einem mittleren Staudruck von $q_0 = 45{,}5$ [kg/m²] und $v_0 = 27{,}8$ [m/s], der andere bei $q_0 = 83$ [kg/m²] und $v_0 = 37{,}6$ [m/s]. Die Amplitude der Schwingung betrug 30 mm. Neben den Meßergebnissen sind gleichzeitig in Abb. 10 noch die nach den weiter oben abgeleiteten Formeln berechneten Fehlerkurven eingezeichnet. Mit zunehmender Schwingungsfrequenz werden die gemessenen Staudruckanzeigefehler größer als die berechneten. Es ist zu bemerken, daß die Meßwerte wegen der Kleinheit der auftretenden Staudruckdifferenzen etwas unsicher sind. Die jeweils zugehörige gleichzeitige Ablesung der

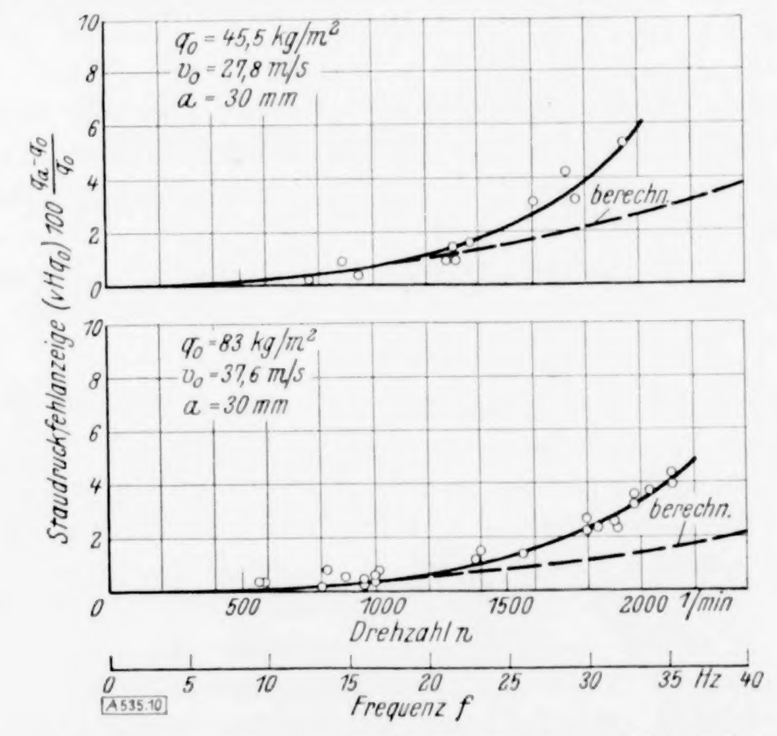


Abb. 10. Gemessene Staudruckfehlanzeige in Abhängigkeit von der Motordrehzahl n bzw. der Frequenz der Schwingung f.

beiden Staudrücke gestaltete sich etwas schwierig, weil die Geschwindigkeit des Instrumenten-Windkanals zeitweise ein wenig schwankte, was gerade bei den vorliegenden Messungen als störend empfunden wurde. In einem Windkanal mit besserer Geschwindigkeitsregelung ließen sich wahrscheinlich genauere Messungen erzielen. Bei der vorliegenden Aufgabe handelt es sich jedoch nur darum, festzustellen, ob bei derartigen Schwingungen überhaupt meßbare Fehler auftreten. Für die größenordnungsmäßige Bestimmung der Fehler dürfte die Meßgenauigkeit ausreichen.

Der Grund dafür, daß die berechneten Fehlerwerte kleiner sind als die gemessenen, kann einmal in den der Rechnung zugrunde liegenden verhältnismäßig einfachen Annahmen liegen. Der Rechnung wurde die Annahme zugrunde gelegt, daß ein dem Geschwindigkeitsquadrat proportionaler Mittelwert angezeigt wird. Dieser Fall ist der günstigste, und die unter dieser Voraussetzung berechneten Fehler sind die Mindestfehler, die unbedingt auftreten müssen. Daß größere Anzeigefehler auftreten, als die Rechnung erwarten läßt, kann auch in den Eigenschaften der Versuchseinrichtung, der Anzeige-Instrumente und der Druckleitungen seinen Grund haben; denn wie bereits weiter oben erwähnt, wurden bei den theoretischen Betrachtungen diejenigen Anzeigefehler nicht berücksichtigt, die durch Leitungskapazität oder Drosseln verursacht werden können. Trotz der gegenüber den schwingenden Massen verhältnismäßig großen Masse der feststehenden Teile der Versuchseinrichtung und des Motors und trotz teilweisen Massenausgleichs der hin- und herschwingenden Teile ließen sich Eigenschwingungen der gesamten Versuchseinrichtung nicht ganz vermeiden. Es muß weiterhin damit gerechnet werden, daß auch der Kopf des schwingenden Prandtlrohrs selbst zusätzliche Schwingungen ausgeführt hat, so daß die wirkliche Amplitude wahrscheinlich etwas größer war als der bei der Rechnung eingesetzte Kurbelradius. Die Abweichung der beim Versuch gewählten Schwingungsform von der rechnerisch zugrunde gelegten reinen Sinusschwingung ist praktisch belanglos[4]). Wenn auch die gemessenen Fehler offenbar größer sind als die berechneten, so können die abgeleiteten Formeln trotzdem zur Abschätzung des mindestens auftretenden kleinsten Fehlers dienen, so daß in allen Fällen, in denen sich schon rechnerisch unzulässig hohe Fehler ergeben, die wirklichen bestimmt nicht mehr vernachlässigt werden dürfen.

V. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen aus dem Ergebnis der Untersuchung.

Bei Schwingungen des Staurohrs bzw. bei Geschwindigkeitsschwankungen kann die Staudruckanzeige gefälscht werden. Die Fehlanzeige ist in der Abhängigkeit des Staugerätes von der Geschwindigkeit begründet. Vernachlässigt man die Anzeigefehler, die durch Leitungskapazität oder Drosseln verursacht werden können, so ist die Anzeige von Staudruckmeßgeräten nach dem Differenzdruckverfahren dem Geschwindigkeitsquadrat proportional. Trägheitsbehaftete Staugeräte können deshalb im günstigsten Fall nur einen dem zeitlichen Mittelwert des Geschwindigkeitsquadrates proportionalen Wert anzeigen.

Es wurden zwei Fälle untersucht, und zwar:

1. Schwingungen des Staurohrs bzw. Geschwindigkeitsschwankungen in Strömungsrichtung,
2. Schwingungen des Staurohrs senkrecht zur Strömungsrichtung.

---

[4]) Bei den abgeleiteten Formeln wurde für $v_y = a\,\omega \sin \omega t$ angenommen. Die genaue Schwingungsform des Prandtlrohrs bei den Versuchen würde ergeben:

$$v_y = a\,\omega \left[\sin \omega t \pm \frac{\lambda}{2} \sin (2\,\omega t)\right].$$

Hierbei ist $\lambda = \frac{a}{l} = \frac{30}{130} = 0{,}231$ das Schubstangenverhältnis. Für das Fehlerglied ergibt sich dann in analoger Weise wie weiter oben

$$\frac{1}{T}\int_0^T [v_y(t)]^2\,d t = \frac{a^2\omega^2}{T}\int_0^T \left[\sin \omega t \pm \frac{\lambda}{2} \sin (2\,\omega t)\right]^2 d t = \frac{a^2\omega}{T}\left[-\frac{1}{4}\sin 2\,\omega T + \frac{1}{2}\,\omega T \pm \frac{2}{3}\,\lambda \sin^3 \omega T \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda^2}{4}\left(\sin \omega T \cos^3 \omega T + \frac{1}{4} \sin 2\,\omega T + \frac{1}{2}\,\omega T\right)\right].$$

Wird nun über eine Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$ integriert, so erhält man:

$$\frac{1}{T}\int_0^T [v_y(t)]^2\,d t = 2\,a^2\,\pi^2 f^2 \left[1 + \frac{\lambda^2}{4}\right] = 2\,a^2\,\pi^2 f^2 \cdot 1{,}013\,.$$

Die Abweichung ist also vernachlässigbar klein.

Unter der Voraussetzung, daß das Staurohr den Mittelwert einer oder mehrerer Schwingungen liefert, erhält man bei der Annahme einer Sinusschwingung von der Frequenz f und mit der Amplitude a bei Schwingung in Strömungsrichtung für die Staudruckfehlanzeige

$$q_a - q_0 = q_a - \frac{\varrho\, v_0^2}{2} = \varrho\, a^2 \pi^2 f^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Der absolute Betrag der Staudruckfehlanzeige ist unabhängig von der Größe der jeweiligen zeitlich unveränderlichen mittleren Geschwindigkeit v_0 bzw. des daraus resultierenden Staudrucks $q_0 = \frac{\varrho\, v_0^2}{2}$.

Bei Schwingungen senkrecht zur Strömungsrichtung tritt gleichzeitig eine sich periodisch ändernde Schräganströmung auf. Die durch die Schwingung hervorgerufene stets positive Staudruckfehlanzeige erfährt durch die Schräganströmung gleichzeitig wieder eine Verminderung. Es wurde nun angenommen, daß beim Schwingen des Prandtlrohrs in jedem Augenblick, wo der Anströmwinkel einen bestimmten Wert erreicht, der Einfluß der Schräganströmung derselbe ist wie bei gleicher stationärer Schräganströmung. Unter den gleichen Annahmen wie bei der Schwingung in Strömungsrichtung (Sinus-Schwingung und Integration über eine Schwingungsdauer) und Berücksichtigung des Einflusses der Schräganströmung ergibt sich dann beim senkrecht zur Strömungsrichtung schwingenden Prandtlrohr für das Verhältnis von angezeigtem Staudruck q_a zum tatsächlich zu messenden $q_0 = \frac{\varrho\, v_0^2}{2}$:

$$\frac{q_a}{q_0} = \frac{2\, q_a}{\varrho\, v_0^2} = \frac{v}{v_0}\left[-2{,}44 + 7{,}44\left(\frac{v_0}{v}\right)^2 - 4\left(\frac{v_0}{v}\right)^4\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14).$$

Hierbei ist

$$v = \sqrt{v_0 + 2\, a^2 \pi^2 f^2}\,.$$

Der bei Schwingungen des Prandtlrohrs senkrecht zur Strömungsrichtung nach Gl. (14) erreichbare Größtfehler kann bei allen Amplituden und Frequenzen im ungünstigsten Fall höchstens $8\,\%$ q_0 betragen. Man erreicht den Größtfehler

$$\left(\frac{q_a}{q_0}\right)_{\max} = 1{,}08\,, \quad \text{wenn } \frac{a\, f}{v_0} = 0{,}092 \text{ ist} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15).$$

Wird die Staudruckfehlanzeige in Abhängigkeit von $\frac{a\, f}{v_0}$ dargestellt, so ergibt sich ein Schaubild, das gegen eine Änderung der Einzelgrößen invariant ist (vgl. Abb. 7). Sind Amplitude a [m], Frequenz f [Hz] und Geschwindigkeit v_0 [m/s] bekannt, so läßt sich ohne langwierige Rechnung durch Bildung des Ausdrucks $\frac{a\, f}{v_0}$ sofort die zu erwartende Staudruckfehlanzeige ablesen. Die praktisch auftretenden Fälle dürften in der Regel zwischen den beiden Grenzfällen, Schwingung in Strömungsrichtung und Schwingung senkrecht zur Strömungsrichtung, liegen.

Für den Fall der Schwingung senkrecht zur Strömungsrichtung wurde die Staudruckfehlanzeige durch Windkanalversuche für eine Amplitude von $a = 30$ mm bestimmt (vgl. Abb. 10). Die gemessene Staudruckfehlanzeige stimmte nur bei kleinen Frequenzen mit den berechneten Werten überein. Mit zunehmender Frequenz wurden die gemessenen Werte größer als die berechneten. Die Abweichung der Meßergebnisse von den berechneten Anzeigefehlern dürfte teilweise in den verhältnismäßig einfachen Rechnungsannahmen ihren Grund haben, teils auch in der ungenauen Erfassung der Schwingungsamplitude und in der Vernachlässigung der Anzeigefehler, die durch Leitungskapazität und Drosselung entstehen können. Da das Ziel der Aufgabe nur die Ermittlung der Größenordnung der auftretenden Staudruckanzeigefehler war, wurde die Ursache der Abweichung der Meßwerte von den berechneten Werten nicht weiter verfolgt.

Zur Abschätzung der Größenordnung der auftretenden Staudruckanzeigefehler dürfte die Genauigkeit der abgeleiteten Formeln ausreichen. Im allgemeinen sind die praktisch auftretenden Schwingungen der Staugeräte für die Staudruckanzeige belanglos, weil einerseits die hierbei möglichen Fehler zumeist bedeutungslos sind und andererseits unliebsame größere Schwingungen leicht vermieden werden können. In Sonderfällen, z. B. bei genauen Staudruckmessungen am fliegenden Flugzeug und auch unter besonderen Versuchsbedingungen im Laboratorium, sind Schwingungen der Staurohre jedoch zuweilen zu beachten, wenn ihre Amplitude und Frequenz größere Ausmaße annehmen. Das gleiche gilt natürlich auch von Geschwindigkeitsschwankungen, sofern der Staudruck der zeitlich unveränderlichen mittleren Geschwindigkeit v_0 gemessen werden soll.

Über asymptotische Reihenentwicklungen in der Operatorenrechnung.

Von *Åke Pleijel* in Stockholm.

Zuerst will ich in Kürze einige Formeln aus der Heavisideschen Operatorenrechnung angeben.

In der Operatorengleichung

$$h(t) = \varphi(p) \cdot 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

ist p das Zeichen für $\frac{d}{dt}$, $\varphi(p)$ ist die bekannte Operatorenfunktion und $h(t)$ wird gesucht. Die Gl. (1) wird hier am besten als äquivalent mit der komplexen Integraldarstellung von $h(t)$ definiert:

$$h(t) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{pt}}{p} \varphi(p) \cdot dp \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

wo der Integrationsweg die rechte Hälfte eines Kreises um den Ursprung mit dem ins Unendliche wachsenden Radius R ist. Unter den unten angegebenen Voraussetzungen, denen $\varphi(p)$ in physikalischen Problemen gewöhnlich unterworfen ist, wird für positive t-Werte das entsprechende Integral über dem linken Halbkreis null, wenn R ins Unendliche übergeht. Da wir in dem folgenden $h(t)$ für $t > 0$ zu betrachten haben, können wir die Integration über den ganzen Kreis erstrecken.

Über Operatorengleichungen der Form $h(t) = \varphi(p) \cdot f(t)$ braucht hier nur gesagt zu werden, daß die in Frage kommende Operation unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen definiert werden kann, und daß diese Definition so wird, daß die Gleichung

$$\{\varphi(p) \cdot \psi(p)\} \cdot 1 = \varphi(p) \cdot \{\psi(p) \cdot 1\}$$

gültig ist. Weiterhin gilt die sog. Verschiebungsregel

$$\varphi(p) \cdot e^{a t} f(t) = e^{a t} \cdot \varphi(p + a) \cdot f(t)$$

und für die formelle Behandlung von (1) ist die Operatorenbeziehung

$$p^{-h} \cdot 1 = \frac{t^h}{\Gamma(1+h)}; \quad h > -1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

von Wichtigkeit. Für $h \leq -1$ gilt

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int \frac{e^{pt}}{p} \cdot p^{-h} \cdot dp = \frac{t^h}{\Gamma(1+h)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3a),$$

wo am ganzen Kreis entlang integriert wird[1]).

Im folgenden soll $\varphi(p)$ so beschaffen sein, daß der Grenzwert (2) existiert. Außerdem soll gelten, daß

$$\lim_{|p| \to \infty} \frac{\varphi(p)}{p} = 0 \qquad \text{für} \qquad \frac{\pi}{2} \leq \arg p \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Endlich wird angenommen, daß $\varphi(p)$ eine, in der ganzen Ebene mit Ausnahme einer endlichen Anzahl Punkte, reguläre analytische Funktion ist. Wenn a eine, im Endlichen belegene, singuläre Stelle ist, soll eine für genügend kleine Werte von $|p - a|$ konvergente Entwicklung

$$\varphi(p) = (p-a)^{\alpha} \cdot \{a_0 + a_1 (p-a)^k + a_2 (p-a)^{2k} + \ldots\}$$

gelten, wo k rational > 0 und α willkürlich ist.

Die Absicht der vorliegenden Arbeit ist, mit Hilfe von (2) und unter obenstehenden Voraussetzungen betreffend $\varphi(p)$ eine formelle Methode zu studieren, die die Lösung von (1) in Form einer asymptotischen Reihe ergibt. In den meisten Problemen der angewandten Operatorenrechnung, wo es sich um asymptotische Entwicklung der Lösung handelt, ist φ den obenstehenden Voraussetzungen unterworfen.

[1]) Literatur: H. Jeffreys, Operational Methods in Mathematical Physics. Cambridge 1931.

Die Methode, die auf Heaviside zurückgeht, geht aus folgendem hervor: Wegen der Verschiebungsregel gilt $\left(a \text{ ist eine singuläre Stelle von } \frac{\varphi(p)}{p}\right)$

$$\varphi(p)\cdot 1 = \varphi(p)\,.\,e^{at}\cdot e^{-at} = e^{at}\cdot\varphi(p+a)\,e^{-at}\,.$$

Außerdem ist

$$e^{-at} = \frac{p}{p+a}\cdot 1\,.$$

Also ist die Operatorengleichung (1) äquivalent mit

$$h(t) = e^{at}\cdot\frac{p}{p+a}\,\varphi(p+a)\cdot 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Nach den Annahmen, die wir zugrunde gelegt haben, gilt für genügend kleine $|p|$ eine konvergente Entwicklung

$$\frac{p}{p+a}\cdot\varphi(p+a) = p^{\alpha'}\cdot\{C_0 + C_1\,p^k + C_2\,p^{2k} + C_3\,p^{3k} + \ldots\} \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Wird diese Reihe nun in die Operatorengleichung (4) eingesetzt, und läßt man die Reihe Glied für Glied operieren, so erhält man wegen (3) eine Reihenentwicklung H_a nach abnehmenden Potenzen von t, mit e^{at} multipliziert. Die formelle, im allgemeinen divergente Reihe H_a wird im folgenden die zu a hörende Heavisidesche Entwicklung genannt. Es ist leicht zu verstehen, daß weder das gliedweise Operieren noch die Anwendung von (3) zulässig ist. Trotzdem zeigt sich manchmal, daß die erhaltene Reihe $e^{at}\cdot H_a$ eine verwendbare, asymptotische Entwicklung von $h(t)$ für $t>0$ ergibt. Man erhält jedoch eine solche Heavisidesche Reihe für jede Singularität, und man kann sich fragen, ob man mit Hilfe dieser Reihen eine asymptotische Entwicklung für $h(t)$ herleiten kann, die für t reell, >0 gültig ist.

Eine verwandte Frage ist früher von J. R. Carson[2]) und N. Wiener[3]) behandelt worden. Diese Autoren gehen von der Annahme aus, daß der Ursprung schon anfangs eine singuläre Stelle ist und fragen dann, unter welchen Umständen die daraus sich ergebende asymptotische Reihe $h(t)$ darstellt. Die untenstehende Methode ergibt, unter den gemachten Voraussetzungen, immer das asymptotische Verhalten von $h(t)$ für t reell >0. Man erhält also auch den stationären Endzustand. Unsere Resultate werden mit Hilfe einer gewöhnlichen Abschätzung der Integrale des Typs (2) gewonnen, und die Anwendung dieser Abschätzung ist wegen der nahen Verwandtschaft der Operatorenrechnung mit der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen natürlich.

Wir gehen aus von

$$h(t) = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{pt}}{p}\,\varphi(p)\,dp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Bevor man integriert, muß man jedoch $\varphi(p)$ durch Schnitte in der p-Ebene eindeutig machen und einen Funktionszweig auswählen. Das letztere ist in diesem Zusammenhang von geringerer Bedeutung. Die Schnitte werden auf folgende Weise gelegt: Der Punkt a soll ein Verzweigungspunkt der Funktion $\varphi(p)$ sein. Er wird von einem Kreis c umgeben

$$|p-a| = r,$$

in dem r so klein genommen ist, daß die übrigen Singularitäten völlig ausgeschlossen werden (so daß sie noch nicht einmal auf der Peripherie liegen). Der Schnitt soll nun in c von a zu $(a-r)$ einem Radius entlang gehen. Außerhalb von c soll der Schnitt, ohne andere Singularitäten von $\frac{\varphi(p)}{p}$ zu treffen, $(a-r)$ mit reellen $-\infty$ verbinden. Dieser letzte Teil, S, des Schnittweges wird als eine kontinuierliche Kurve mit kontinuierlich variierender Tangente angenommen. Die Richtungskoeffizienten der Tangente sollen gleichmäßig beschränkt sein, so daß, wenn $p = x + iy$, S entlang eine Abschätzung mit konstantem k,

$$|dp| < k\cdot|dx|$$

gültig ist.

Für den Teil S der Schnittkurve gilt der Hilfssatz: Wenn die Funktion $Q(p)$ entlang S kontinuierlich ist und einer Ungleichung

$$|Q(p)| < K\cdot e^{-\varkappa x}$$

---

[2]) J. R. Carson: Electric Circuit Theory And The Operational Calculus, 1926.

[3]) N. Wiener: The Operational Calculus, Math. Ann. 95, 1926.

genügt, wo K und $\varkappa$ reelle, positive Konstanten sind und wie oben $p = x + i y$, dann ist

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^q}{e^{a t}} \int_S e^{p t} \cdot Q(p) \cdot dp = 0$$

unabhängig von q.

Die Gültigkeit dieses Satzes geht daraus hervor, daß für $t > \varkappa$

$$\left| \int_S e^{p t} \cdot Q(p)\, dp \right| \leq \int_S e^{x t} \cdot K e^{-\varkappa x} \cdot k\, |dx| = K k \int_{-\infty}^{a-r} e^{x(t-\varkappa)} \cdot dx = K k\, e^{-\varkappa(a-r)} \cdot e^{a t} \cdot \frac{e^{-r t}}{t - \varkappa}.$$

Das Integral (6) kann nach Cauchys Integralsatz in eine Summe von Integralen aufgeteilt werden, die entlang gewissen, die Singularitäten von $\frac{\varphi(p)}{p}$ umschließenden, aber sonst willkürlichen Kurven genommen werden. Diese Kurven werden auf folgende Art und Weise gelegt: Für einen Pol: ein Kreis um denselben, klein genug, um die übrigen Singularitäten von $\frac{\varphi(p)}{p}$ vollständig auszuschließen. Für eine Verzweigungsstelle: auf der einen Seite S_1 von dem dazugehörenden äußeren Schnitt von $-\infty$ zu $(a - r)$. Dann um c und wieder zurück zu $-\infty$ an der anderen Seite des Schnittes, S_2, entlang. Alles in positiver Richtung.

Wir studieren den Beitrag I_a, den man von der Verzweigungsstelle a erhält. Es gilt, daß

$$I_a = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1 + S_2} \frac{e^{p t}}{p} \cdot \varphi(p)\, dp + \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{e^{p t}}{p} \varphi(p)\, dp .$$

Setzt man hier das erste Integral auf der rechten Seite gleich A und setzt man, entsprechend (5), in das andere

$$\frac{\varphi(p+a)}{p+a} = \frac{1}{p} \cdot p^{a'} \cdot \{C_0 + \ldots + C_n p^{n k} + R_n(p)\},$$

nachdem man erst durch eine Variabelntransformation p durch $(p + a)$ ersetzt hat (wobei c, S_1, S_2 in c', S'_1, S'_2 verwandelt werden), so erhält man

$$I_a = \frac{A}{2\pi i} + e^{a t} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{c'} \frac{e^{p t}}{p} p^{a'} (C_0 + \ldots + C_n p^{n k})\, dp + e^{a t} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{c'} \frac{e^{p t}}{p} p^{a'} R_n(p)\, dp .$$

Der Integrationsweg im mittleren Integral kann nach Cauchys Satz durch die transformierten Wege S'_1, S'_2 (in entgegengesetzter Richtung) und einen unendlich großen Kreis um den Ursprung ersetzt werden. Der Kreis wird positiv durchlaufen. Das Integral um diesen unendlich großen Kreis ergibt, wie man leicht nach (3a) ersieht, gerade den Anfang der Heavisideschen Entwicklung H_a um a. Die Integrale längs S_1 und S_2 werden zusammen mit B bezeichnet. Es ergibt sich, daß

$$I_a = \frac{1}{2\pi i}(A + B e^{a t}) + e^{a t} \cdot (\text{Anfang der Heavisideschen Entw.}) + \frac{e^{a t}}{2\pi i} \int_{c'} \frac{e^{p t}}{p} p^{a'} \cdot R_n \cdot dp .$$

In dieser Gleichung kann der Hilfsatz auf A und B angewandt werden, so daß unabhängig von q

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^q}{e^{a t}} (A + B e^{a t}) = 0 .$$

Um zu zeigen, daß der Anfang der Heavisideschen Entwicklung eine semikonvergente Reihe für $\frac{I_a}{e^{a t}}$ ergibt, braucht man, da die niedrigste Potenz der Entwicklung $t^{-(k n + a')}$ ist, nur zu zeigen, daß

$$\lim_{t \to +\infty} t^{k n + a'} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{c'} \frac{e^{p t}}{p} p^{a'} \cdot R_n\, dp = 0 .$$

Um dies zu beweisen, nehmen wir an, daß wir n so groß gewählt haben, daß

$$k(n+1) + a' - 1 > 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{p t}}{p} \cdot p^{a'} \cdot R_n \cdot dp ,$$

das längs des in der untenstehenden Abbildung bezeichneten Weges genommen ist, wird nach Cauchy null. Wegen (7) nähert sich das Integral um den inneren Kreis dem Grenzwert null, wenn der Radius des Kreises gegen null strebt. Es ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c'}\frac{e^{pt}}{p}p^{\alpha'}R_n\,dp$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-r}^{0}\frac{e^{pt}}{p}\cdot p^{\alpha'}R_n\,dp$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{-r}\frac{e^{pt}}{p}\cdot p^{\alpha'}R_n\,dp$$

|p| = r

-r

0

A533.1

(das erste Integral den oberen Weg, das zweite den unteren entlang).

Wenn der Maximumwert von

$$|C_0+C_1Z+C_2Z^2+\ldots| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

auf dem Kreis $|Z|=\varrho>r^k$ ($\varrho<$ der Konvergenzradius von (8)) mit M bezeichnet wird, so gilt nach Cauchys Koeffizientenschätzung

$$|C_\nu|\leq\frac{M}{\varrho^\nu}$$

und daraus erhält man für $|p|\leq r$ die Schätzung des Restglieds

$$|R_n|=|C_{n+1}\cdot p^{(n+1)k}+C_{n+2}\cdot p^{(n+2)k}+\ldots|\leq M\frac{\left|\frac{p^k}{\varrho}\right|^{n+1}}{1-\left|\frac{p^k}{\varrho}\right|}\leq\frac{M\cdot\frac{1}{\varrho^{n+1}}}{1-\frac{r^k}{\varrho}}\cdot|p^k|^{n+1}.$$

Für das Restgliedintegral ergibt sich wegen der obengeschriebenen Darstellung dieses Integrals und wegen der Restgliedschätzung:

$$\left|\int_{c'}\frac{e^{pt}}{p}p_{\alpha'}R_n\,dp\right|<\text{konst}\int_0^r e^{-xt}\cdot x^{k(n+1)+\alpha'-1}\cdot dx$$

$$<\text{konst}\int_0^\infty e^{-xt}\cdot x^{k(n+1)+\alpha'-1}\cdot dx=\text{konst}\frac{\Gamma(k(n+1)+\alpha')}{t^{k(n+1)+\alpha'}}.$$

Damit ist bewiesen, daß die Heavisidesche Entwicklung für den Punkt a eine semikonvergente Reihe für $\frac{I_a}{e^{at}}$ ergibt. Dasselbe gilt für die Pole, wobei man aber nur endlich viele Glieder t^s erhält, wo s ganz und ≥ 0 ist. Jede Heaviside-Entwicklung ist asymptotisch in dem Sinne, daß

$$\left\{\frac{I_a}{e^{at}}-\text{Teilsumme}\right\}=O(t^{-h}),$$

wenn t^{-h} die höchste, vernachlässigte Potenz ist.

Wir wollen nun die Summe der Beiträge I_a für große, reelle und positive t-Werte studieren. Nach Cauchys Satz gilt

$$h(t)=\sum_a I_a=\sum_a e^{at}\cdot L_a(t),$$

wo L_a eine Funktion ist, die die semikonvergente Entwicklung H_a besitzt. Wir betrachten die Singularitäten $\bar{a}$ von $\frac{\varphi(p)}{p}$, die den größten Realteil a haben. Die Beiträge von diesen werden, wegen ihrer Exponentialfaktoren, für große t-Werte ausschlaggebend. Es ist leicht zu zeigen, daß der Fehler, den man macht, wenn man

$$\sum_{\bar{a}}e^{\bar{a}t}\cdot L_{\bar{a}}=\sum_{\bar{a}}e^{\bar{a}t}\cdot H'_{\bar{a}}$$

schreibt, wo H'_a Teilsummen der entsprechenden, semikonvergenten Reihen sind, von größerer Ordnung ist als die Summe der übrigen Beiträge, unabhängig von der Wahl der Teilsummen. Dies gilt, wenn unter den Reihen wirkliche Reihen mit unendlich vielen Gliedern sind. Das Mitnehmen der übrigen Beiträge ist in diesem Falle ganz ohne Nutzen. Man erhält die folgende Regel:

Die Heavisideschen Entwicklungen werden für die Singularitäten $\bar{a}$ von $\frac{\varphi(p)}{p}$ gebildet, die den größten Realteil a haben. Die Summe

$$\sum_{\bar{a}} e^{\bar{a}\,t} \cdot H_a$$

ergibt eine asymptotische Entwicklung der Funktion $h(t)$ für reelle, positive t-Werte.

Die Art dieser Entwicklung ist die folgende: Man hat

$$\frac{h(t)}{e^{a\,t}} = \sum_{\bar{a}} e^{(\bar{a}-a)\,t} \cdot H'_{\bar{a}} + \varepsilon(t),$$

wo wie oben $H'_{\bar{a}}$ Teilsummen sind. Die höchsten vernachlässigten Potenzen sollen t^{-k_1}, $t^{-k_2}, \ldots$ sein. Dann gilt

$$\varepsilon(t) = O(t^{-k}),$$

wo

$$k = \min(k_1, k_2 \ldots).$$

Dies ergibt sich ohne Schwierigkeit, wenn man beachtet, daß die Faktoren $e^{(a-a)t}$ beschränkt sind.

In einigen Fällen ist es indessen richtig und vorteilhaft, auch andere Entwicklungen als die von $\bar{a}$ herrührenden mitzunehmen. Dies gilt, wenn die Entwicklungen der Beiträge von $\bar{a}$ nur endlich viele Glieder enthalten (wie für Pole). Denn dann ist der oben besprochene Fehler null. Wie die Regel in diesem Falle zu ändern ist, ist leicht einzusehen.

Als ein Beispiel möchte ich folgendes vorbringen: Nach J. R. Carson kann man die „Heavisidesche Regel" auf der Operatorengleichung

$$I(t) = \sqrt{\frac{c}{R}} \cdot \frac{\omega\, p}{p^2 + \omega^2} \sqrt{p} \cdot 1$$

nicht anwenden. Es handelt sich bei ihm nur um die Entwicklung um den Ursprung. Nach der oben angeführten Regel erhält man eine asymptotische Entwicklung für $I(t)$, wenn man die von $\pm i\,\omega$ herrührenden Beiträge zu der von J. R. Carson angegebenen Reihe hinzufügt. Diese Beiträge ergeben zusammen:

$$\sqrt{\frac{c\,\omega}{2\,R}} (\cos \omega\, t + \sin \omega\, t).$$

Die von J. R. Carson angegebene Entwicklung (um den Ursprung) ist

$$-\sqrt{\frac{c}{\pi\, R\, t}} \cdot \left\{ \frac{1}{2\,\omega\, t} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2\,\omega\, t)^3} + \cdots \right\}.$$

Man hat also

$$I(t) \simeq \sqrt{\frac{c\,\omega}{2\,R}} (\cos \omega\, t + \sin \omega\, t) - \sqrt{\frac{c}{\pi\, R\, t}} \cdot \left\{ \frac{1}{2\,\omega\, t} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2\,\omega\, t)^3} + \cdots \right\},$$

was auch den stationären Endzustand ergibt.

Über das obenstehende Beispiel und über die Bedeutung unserer Methode weise ich auf das zitierte Buch von J. R. Carson, Seite 67, hin.

Zum Schluß möchte ich eine Sache von mathematischem Interesse anführen. Die Voraussetzung

$$\lim_{|p| \to \infty} \frac{\varphi(p)}{p} = 0,$$

die für $\frac{\pi}{2} \leq \arg p \leq \frac{3\,\pi}{2}$ galt, soll nun für alle Werte des Arguments von p gelten. Dann kann man die obenstehende Methode auch für $t < 0$ und sogar für komplexe t anwenden. Wenn wir eine asymptotische Reihe, gültig in Richtung vom Ursprung nach dem Punkt $(\cos \psi + i \sin \psi)$ suchen wollen, werden die Singularitäten $p = x + i\,y$ von Bedeutung, die den größten Wert von

$$(x \cos \psi + y \sin \psi)$$

ergeben. Man kann leicht mit Hilfe der konvexen Hülle der Singularitäten von $\frac{\varphi(p)}{p}$ Richtungen angeben, in denen verschiedene asymptotische Entwicklungen gültig werden. Dies tritt z. B. bei der Besselschen Funktion $J_0(t)$ ein, die durch die Operatorengleichung

$$J_0(t) = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} \cdot 1$$

gegeben ist.

BUCHBESPRECHUNGEN

H. **SEIFERT** u. W. **THRELFALL,** Lehrbuch der Topologie. VII u. 353 S., mit 132 Fig. Leipzig u. Berlin 1934, B. G. Teubner. Geb. 20 M.

Die um die Mitte des vorigen Jahrhunderts vom Göttinger Mediziner Listing begründete und kurz darauf von B. Riemann mit größtem Erfolg auf die Funktionentheorie angewandte Topologie ist lange Zeit als ein sehr spezieller Zweig der Geometrie angesehen worden, der nur für den reinen Mathematiker von Interesse zu sein schien.

Nachdem aber Poincaré gefunden hatte, daß topologische Fragen auch für die meisten Probleme der Mechanik von grundlegender Bedeutung sind, hat sich das Anwendungsgebiet dieser Disziplin ständig erweitert und ist allmählich in fast alle Teile der reinen und der angewandten Mathematik eingedrungen.

In den letzten Jahrzehnten ist die Topologie, fußend auf den Arbeiten von H. Poincaré und L. E. J. Brouwer, zu einer selbständigen, sehr ausgedehnten Disziplin geworden, und es hat sich ein riesiges Material von Ergebnissen angesammelt, das in den verschiedensten Zeitschriften zerstreut und infolgedessen schwer zugänglich ist.

Es ist daher warm zu begrüßen, daß Seifert und Threlfall ein Buch geschrieben haben, das bei nicht zu großem Umfang eine ausgezeichnete Übersicht über die Methoden und über die Hauptresultate dieses außerordentlich anziehenden Teils der Mathematik liefert. Die Schwierigkeiten, die bei der Redaktion eines derartigen Buches immerfort auftauchen, sind beträchtlich: man muß die abstraktesten Schlußketten (ohne welche nur ein sofort zerrinnendes Luftschloß entstehen würde) mit dem lebendigsten Anschauungsvermögen verbinden, welches allein imstande ist, die gewonnenen Resultate zu deuten und den Anwendungen zuzuführen. Diese komplizierte Aufgabe haben die beiden Autoren, die übrigens durch ihre eigenen Untersuchungen im Gebiete der Topologie einen glänzenden Namen erworben haben, restlos gelöst. Auch die schwierigeren Teile des Buches können glatt gelesen werden, und fortwährend wird, an sorgfältig gewählten, stets interessanten Beispielen, die Bedeutung der vorgetragenen Sätze reich illustriert. Ich bin der Überzeugung, daß auch der Anfänger bei geschickter Benutzung des Buches, d. h. wenn er die axiomatischen Schlußfolgen (die in Wirklichkeit das Rückgrat der Topologie bilden) zunächst flüchtiger liest, sehr schnell in die Lage kommen wird, bei einem zweiten Studium des Buches, ein volles Verständnis auch für die komplizierteren Fragen zu erwerben.

Das Buch beginnt mit einem einleitenden Kapitel, in dem eine sehr geschickte Auswahl von Problemen, die in der Topologie auftreten, rein anschaulich behandelt wird. Im zweiten Kapitel wird der Begriff der Umgebung axiomatisch definiert, und die einfachsten Bausteine der topologischen Räume, die Simplexe sowie auch ihre Zusammensetzung zu Komplexen erklärt. Im dritten Kapitel werden die ersten Invarianten, d. h. die Homologiegruppen, die Bettischen Zahlen, die Torsionskoeffizienten eingeführt. Daß dies Invarianten sind, d. h. daß sie von der speziellen Darstellung eines Komplexes unabhängig sind, wird im folgenden Kapitel mit Hilfe der Methode der simplizialen Approximation, die Brouwer ersonnen und später verschiedene Autoren vervollkommnet haben, bewiesen. Im fünften Kapitel werden weitere Invarianten, wie z. B. die Dimensionen eines Gebildes, untersucht. Hierauf werden die zweidimensionalen Flächen betrachtet, die einzigen Gebilde, die man bei dem heutigen Stande der Topologie erschöpfend behandeln kann. Die folgenden Kapitel (7. und 8.) sind dem Studium der Fundamentalgruppe eines Komplexes und der Theorie der Überlagerung gewidmet. Im neunten Kapitel werden die dreidimensionalen Räume, im zehnten die mehrdimensionalen Räume behandelt. Hier sieht man auf Schritt und Tritt, wie viele der einfachsten und interessantesten Fragen noch immer unbeantwortet sind. Dann folgt die Theorie des Abbildungsgrads, die man Brouwer verdankt, sowie einige Fixpunktsätze. Das Buch schließt mit einer Übersicht über Sätze der allgemeinen Gruppentheorie, die fortwährend gebraucht werden, so daß der Leser sie hier gleich nachschlagen kann, wenn er über den einen oder den anderen dieser Sätze im Zweifel sein sollte.

Die historischen, bibliographischen und sachlichen Anmerkungen, die am Ende des Werkes zusammengestellt sind, geben eine Idee der mannigfaltigen Probleme, die aus Raumersparnis weggelassen werden mußten und enthalten viele Anregungen für speziellere Studien.

Das Buch enthält ein sorgfältiges Literaturverzeichnis und wird durch viele Figuren, die die Anschauung unterstützen, belebt.

München. C. Carathéodory. 524

Dr. PHILIPP **FRANK,** Prof. a. d. Deutschen Univ. in Prag, und Dr. RICHARD **v. MISES,** Prof. a. d. Univ. Istanbul, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Bd. II Physikalischer Teil. 2. verm. Aufl. zugl. 8. Aufl. von Riemann-Webers Partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Braunschweig 1935, Verlag Friedr. Vieweg. XXIV +*1106 S. Preis geh. 60 M., geb. 65 M.

Mit dem vorliegenden zweiten Bande liegt die von Frank und v. Mises herausgegebene Neubearbeitung des Riemann-Weber vollständig in zweiter Auflage vor. Dabei sind die Änderungen und Erweiterungen, die der zweite Band erfahren hat, wesentlich umfangreicher als die des ersten. Das ist dadurch bedingt, daß es nicht nur galt, durch die Änderungen eine größere Einheitlichkeit der Darstellung anzustreben, — auch hier ist es, wie oft in Büchern, die von mehreren Verfassern geschrieben sind, daß die zweite Auflage ihrem Ideal in diesem Punkte wesentlich näher kommt als die erste, — sondern vor allem den Stoff der weiteren Entwicklung der Physik anzupassen; denn der Frank-Mises ist kein Buch, das einen abgeschlossenen Stoff behandelt sondern ein Buch, das mit der Wissenschaft lebt.

Die wichtigste Tatsache, der aus dem letzten Grunde Rechnung getragen werden mußte, ist die Entwicklung der Wellenmechanik seit dem Erscheinen der ersten Auflage. Nicht nur ist deswegen ein von Beck (Kansas) geschriebener Abschnitt über die mathematischen Probleme der Wellenmechanik, der die Schrödingersche Gleichung, ihre Eigenwerte, ihre wichtigsten Lösungstypen, die Störungstheorie und das Mehrkörperproblem sowie die Diracsche relativistische Wellengleichung behandelt, angefügt worden, sondern es sind auch in anderen Abschnitten Umarbeitungen und Zusätze gemacht worden, die auf die Wellenmechanik Rücksicht nehmen. Um nur das Wichtigste zu erwähnen, ist in den Abschnitt über Mechanik zur Vorbereitung ein Kapitel über die Strahlenoptik eingefügt und die Hamiltonsche mathematische Analogie zwischen Lichtstrahl und Bahnkurve schärfer herausgearbeitet. Ferner ist in den Abschnitt über Wärmeleitung und Diffusion ein Paragraph über die Probleme der Wellenmechanik aufgenommen, die auf Differentialgleichungen vom Typus der Diffusionsgleichung führen. An kleineren andere Gebiete berücksichtigenden Zusätzen seien erwähnt: ein kurzer Abschnitt über das Elektronenmikroskop und die ein-

gehendere Behandlung einiger Sätze der statistischen Mechanik. Darüber hinaus findet man überall Zusätze und Erweiterungen und wenn es nur Hinweise auf neuere Arbeiten sind, die die hier gegebene Darstellung ergänzen.

Dienen all diese Erweiterungen zum guten Teil auch der gegenseitigen Anpassung der einzelnen Abschnitte aneinander, so wird die Einheitlichkeit der Darstellung vor allem dadurch wesentlich gefördert, daß die Bearbeitung der Hydromechanik der idealen und der zähen Flüssigkeiten einheitlich von v. Mises und Schulz durchgeführt ist.

Natürlich ist durch die erwähnten Erweiterungen der Umfang und damit leider auch der Preis des Bandes beträchtlich gewachsen. Das ist aber das einzige, was daran bedauerlich ist, denn alle Änderungen sind wesentliche Verbesserungen, für die man den Herausgebern und ihren Mitarbeitern nur dankbar sein kann. Trotz aller Erweiterungen hat der Frank-Mises den Lehrbuchcharakter gewahrt, und zwar den eines ausgezeichneten Lehrbuches, das aus der Literatur der angewandten Mathematik und der theoretischen Physik nicht mehr fortzudenken ist. Auch dem Leser dieser Zeitschrift, d. h. also dem wissenschaftlich interessierten Ingenieur wird das Buch in vielen Fällen ein guter Berater sein. Möge es auch in diesen Kreisen immer weitere Verbreitung finden.

Freiberg (Sa.) Fr. A. Willers. 537

R. **BECKER,** o. Professor a. d. Techn. Hochsch. Berlin, Theorie der Elektrizität. (Neubearb. des Werkes von M. Abraham.) Band I. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität, mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. 10. Aufl. VII + 265 S. m. 59 Fig. Leipzig und Berlin 1933. Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 14.50 M.

Es spricht für die Brauchbarkeit der Neubearbeitung des Abrahamschen Buches durch Becker, daß schon nach so kurzer Zeit eine neue Auflage nötig geworden ist. Gegenüber der neunten im 13. Jahrgang 1933 dieser Zeitschrift von F. Noether besprochenen Auflage sind wesentliche Änderungen nicht vorgenommen worden. Im einzelnen sind jedoch vielfache Ergänzungen — so ist z. B. ein Paragraph über den Entmagnetisierungsfaktor eingefügt — aber auch Vereinfachungen und Kürzungen — z. B. in dem Paragraphen über Drahtwellen bei endlichem Widerstand auf Leitungen — erfolgt. Eine nochmalige eingehende Empfehlung des ausgezeichneten Lehrbuches erübrigt sich.

Freiberg (Sa.). Fr. A. Willers. 504

A. **HAAS,** Prof. für Physik an der Universität Wien, Kleiner Grundriß der theoretischen Physik. Kleine, besonders bearbeitete Ausgabe der Einführung in die theoretische Physik. VII + 183 S. mit 22 Fig. Berlin und Leipzig 1934. Verlag Walter de Gruyter u. Co. Preis geb. 5.30 M.

Der kleine Grundriß ist eine Parallel-Ausgabe zu der bekannten, viel gebrauchten „Einführung in die theoretische Physik" des gleichen Verfassers, hat aber nur den sechsten Teil des Umfanges. Trotzdem gibt er einen Überblick über das gesamte Gebiet der theoretischen Physik unter besonderer Berücksichtigung der modernen Probleme. Der geringe Umfang bedingt natürlich, daß die Ableitungen und Anwendungen meistens fehlen, so daß in manchen Gebieten nur das Gerüst gegeben wird. Um hier wirklich zu einem Verständnis zu kommen, wird daher die Heranziehung ausführlicherer Darstellungen erforderlich sein. Aber infolge der geschickten Auswahl des Stoffes und bei der außerordentlichen Kunst des Verfassers, schwierige Dinge so darzustellen, daß sie den Anschein der Einfachheit gewinnen, dürfte das vorliegende Buch für den ganz geeignet sein, der einen ersten Überblick gewinnen oder der vorhandene Kenntnisse auffrischen will.

Freiberg (Sa.). Fr. A. Willers. 504

KARL **MARBE,** Grundfragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und theoretischen Statistik. V + 177 S. München 1934, Verlag C. H. Beck. Preis 8 RM.

Dort, wo die praktische oder grundsätzliche Unzulänglichkeit unserer Beobachtungen der kausalen Ergründung des Naturgeschehens unüberwindliche Schranken setzt, hat sich die statistische Untersuchungsweise eingebürgert und in weitem Umfange auch bewährt. Das mathematische Rüstzeug dieser Methode bildet die Wahrscheinlichkeitsrechnung; ihr Hauptbegriff, die Wahrscheinlichkeit, wird durch eine ideale Operation erklärt, nämlich durch die Erhebung einer unendlichen Folge gleichartiger Einzelbeobachtungen. Da eine statistische Erhebung nur endlich viele Beobachtungen erfassen kann, ist man gezwungen, bei den Anwendungen die idealen Wahrscheinlichkeiten durch empirische Häufigkeiten zu ersetzen; die hieraus zu erwartenden Abweichungen lassen sich aber nach den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung abschätzen. Dadurch öffnet sich ein Weg zur Prüfung der Frage, ob die Beobachtungen mit den Folgerungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung hinreichend im Einklange sind.

Der Verfasser bestreitet das für eine Reihe von Erscheinungen an der Hand statistischer Stoffsammlungen, die mit Sorgfalt zusammengetragen sind. In der Tat zeigen sich hier mancherlei auffallende Abweichungen; sie erklären sich aber zu einem Teile aus der Begrenztheit des Stoffes, zu einem anderen daraus, daß die Erhebungsart die Forderungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung nur unvollkommen erfüllt. Keinesfalls bilden sie eine tragfähige Unterlage für Marbes „Lehre vom statistischen Ausgleiche", wonach die empirischen Häufigkeiten schneller gegen die ideale Wahrscheinlichkeit konvergieren sollen, als es nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erwarten ist. — Das Buch liefert durch Stoffsammlung und mathematische Analyse einen wertvollen Beitrag zum Problem der Iterationen.

Dresden. P. E. Böhmer. 497

Dr.-Ing. E. h. WILHELM **NUSSELT** VDI, o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. München, Technische Thermodynamik. (Sammlg. Göschen Bd. 1084.) 144 S. m. 65 Abb. Berlin und Leipzig 1934, Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Wenn heute eine Technische Thermodynamik im Umfange eines Göschenbändchens erscheint, so wird man nicht fehlgehen in der Annahme, daß darin der bekannte Weg eingeschlagen wird, der durch die Namen Carnot und Clausius gekennzeichnet ist, und daß sein Ziel der II. Wärmehauptsatz und dessen technische Anwendungen sind. Um so mehr muß man es begrüßen, wenn ein führender Forscher wie Prof. W. Nusselt, München, sich bereit findet, den Band zu verfassen. Denn die richtige Gewichtsverteilung über alle Einzelheiten beim Aufbau und die treffendsten Beispiele für jede Stelle stehen nur dem zu Gebote, der als Forscher immer wieder kritisch an neue Aufgaben herangehen muß, wie sie sich bei der Fortentwicklung ergeben. Daher wird nicht nur derjenige Nutzen aus dem Buche ziehen, der es zu seiner eigenen Belehrung durcharbeitet, sondern auch jeder Lehrer der Technischen Thermodynamik wird sich die eine oder andere Wendung merken. (Nur beim ersten Bei-

spiel für nichtumkehrbare Vorgänge auf Seite 27/28 hätte man dem anspruchsvollen Leser deutlicher sagen können, daß nicht die Beschleunigung, sondern die Zähigkeit des Gases einen nichtumkehrbaren Druckanteil hervorruft.) In der Auswahl des Stoffes mußte natürlich dem beschränkten Umfang Rechnung getragen werden. So widmet sich der Band zu nahezu gleichen Dritteln den Vorbereitungen (I. Hauptsatz, technische Arbeit, Energiestrom und besondere Zustandsänderungen), dem II. Hauptsatz und dem technisch so außerordentlich wichtigen Dampfzustand (nasser und überhitzter Dampf). Gerade in dem letzten Abschnitt sind die älteren und die neueren Zustandsgleichungen für Wasserdampf bemerkenswert ausführlich behandelt. Bei einer Technischen Thermodynamik braucht kaum erwähnt zu werden, daß den Arbeits-, Wärme- und i-s-Diagrammen gebührender Raum gegeben ist. Die zahlreichen Abbildungen und der bekannte auch in den Formeln saubere Druck machen den Band angenehm lesbar.

Dresden. A. Busemann. 498

Dr.-Ing. HUGO **RICHTER** VDI, Priv.-Dozt. a. d. Bergakademie Freiberg, Rohrhydraulik. Allgemeine Grundlagen, Forschung, Praktische Berechnung und Ausführung von Rohrleitungen. IX + 256 S. m. 192 Textabb. u. 44 Zahlentaf. Berlin 1934. Verlag von Julius Springer. Preis geb. 22,50 M.

Es war ein recht dankenswertes Unternehmen, aus der umfangreichen neuen Literatur der Hydraulik dasjenige zusammenzustellen, was sich auf die stationäre Strömung in Rohrleitungen bezieht. Der Verfasser hat ohne viel eigenes hinzuzutun die Ergebnisse gesammelt, bis einschließlich zu denen der neuesten Untersuchungen von Prandtl, Kármán und Nikuradse. Das Buch ist gegliedert in einen theoretischen Teil, der die allgemeineren Sätze und Versuchsresultate enthält, und einen praktischen, der die Rechnungsvorschriften für die praktische Benutzung, auch unter Verwendung von Nomogrammen gibt. Behandelt wird hauptsächlich das gerade Rohr von Kreisquerschnitt, doch sind auch Andeutungen für den Fall anderer Querschnitte, sowie für Rohrkrümmungen gegeben. Das reichhaltige Zahlenmaterial scheint einwandfrei zu sein. Das Buch wird sich gewiß in den Kreisen der Ingenieure, die mit der Herstellung von Leitungen zu tun haben, bewähren. Mises. 503

Dr.-Ing. O. K. **FRÖHLICH**, Druckverteilung im Baugrunde mit besonderer Berücksichtigung der plastischen Erscheinungen. 183 S. m. 68 Textabb. Wien 1934, Verlag Julius Springer. Preis kart. 15 M.

Der Verfasser stellt sich in dem vorliegenden Buche die Aufgabe, dem ausführenden Ingenieur jene Unterlagen zu vermitteln, welche zur Bestimmung der Spannungsverteilung und der Formänderungen des Baugrundes notwendig sind. Es ist dem Verfasser mit Erfolg darum zu tun gewesen, ein möglichst abgeschlossenes Bild des heutigen Standes der bisher auf diesem Gebiete errungenen Erkenntnisse zu geben, welches durch eigene Untersuchungen und Gedanken erweitert, dem Leser die physikalisch-mechanische Seite des Problems näherbringen soll. Inhalt und Anordnung des Stoffes, nämlich zuerst die Spannungsverteilungen im elastischen und plastischen Bereich, sodann die Formänderungen zu behandeln, weiterhin die vorhandenen Versuche kritisch zu besprechen und schließlich ausgeführte Fundierungen als Beispiele für Untersuchung und Nachrechnung heranzuziehen, lassen dieses Buch, das von einem Ingenieur für Ingenieure geschrieben wurde, als einen sehr brauchbaren Leitfaden für den Praktiker erscheinen. Aber auch der Theoretiker wird aus demselben eine Reihe von Anregungen schöpfen und auf die Bearbeitung von Problemen geführt werden, deren Lösung für den Grundbau von Wichtigkeit wäre. Denn die Theorie hat bislang eine Reihe von Fragen, die von Bedeutung für die Praxis sind, unbeantwortet gelassen, und wenn deshalb der Verfasser in solchen Fällen zu Näherungslösungen gegriffen hat, die einer strengen Begründung nicht standhalten, so darf ihm hieraus zumindest in jenen Fällen kein Vorwurf gemacht werden, wo er den Leser auf diesen Umstand aufmerksam macht. Andere Fälle, wie z. B. die Einführung eines verfügbaren Parameters r, um die Radialspannungen im unendlichen Halbraum bei Beanspruchung durch eine Einzellast in der Form $\sigma_r = \varkappa \cos \vartheta v\, r^{-2}$ darstellen zu können, sowie die Folgerungen, die hieraus zum Teil gezogen werden, bedürfen wohl noch einer Klärung durch die strengere Theorie.

Wien. Ernst Melan. 508

Dr.-Ing. WILHELM **FLÜGGE**, Priv.-Doz. a. d. Un. Göttingen, Statik und Dynamik der Schalen. VII + 240 S. m. 98 Textabb. Berlin 1934, Verlag von Julius Springer. Preis geh. 21 M.

Das Schrifttum über die Theorie der Schalen mit und ohne Biegungssteifigkeit ist in den letzten zwei Jahrzehnten so angewachsen, daß es kaum mehr zu übersehen ist, auch sind viele wichtige Aufsätze schwer zugänglich. Bei den auf den verschiedenen Gebieten der Technik immer mehr zunehmenden praktischen Anwendungen der Schalentheorie ist weiter die Vielgestaltigkeit der einschlägigen Arbeiten, die in ihren Voraussetzungen auch sehr verschieden sind, ungemein störend. Hier will das vorliegende Buch durch eine übersichtliche und zusammenfassende Bearbeitung auf einheitlicher Grundlage Abhilfe schaffen.

Es sei vorweggenommen, daß dies dem Verfasser voll gelungen ist. Das Buch ist eine Bereicherung unserer Fachliteratur, von der jeder auf dem Gebiete der Schalentheorie arbeitende Ingenieur oder Forscher Nutzen haben wird.

Das Buch gibt nach einer knappen Darstellung der allgemeinen Grundlagen der Theorie der dünnen Schalen die vollständige Theorie der Membranen. Es werden behandelt: die besonders für den Behälter- und Kuppelbau wichtigen Rotationsschalen unter symmetrischer und unsymmetrischer Belastung, die Zylinderschalen, die in letzter Zeit z. B. bei den dünnen Eisenbeton-Tonnendächern vielfache Anwendung gefunden haben, weiter die Vieleckkuppeln- und Translationsflächen. Den Abschluß der Ausführungen über die Schalen ohne Biegungssteifigkeit bildet eine Betrachtung der affinen Membranschalen.

Sodann folgen die entsprechenden Untersuchungen für biegungssteife Kreiszylinderschalen (Flüssigkeitsbehälter, Tonnendächer), Rotationsschalen (Kugel-, Kegel- und beliebige Rotationsschalen), sowie die Theorie der Faltwerke mit und ohne Biegungssteifigkeit.

Ganz besondere Beachtung verdient der Abschnitt über den heutigen Stand der Theorie der Knickung von Schalen. Es werden betrachtet: Kreiszylinder unter Normalspannungen und Torsion, die Ursachen des Biegungsbruches von Schalen, sowie Kugelschalen unter radialem Druck.

Zum Schluß wird noch eine kurze Darstellung der Theorie der Schwingungen drehsymmetrischer Schalen gegeben, die an die grundlegenden Arbeiten von Lord Rayleigh anknüpft. Die gut ausgewählte Literaturübersicht dürfte vielen erwünscht sein.

Aus vorstehender Übersicht erkennt man den reichen Inhalt des Buches von Flügge. Ein solches klares, knappes und doch gut verständliches Buch,

in dem die vielen Originalarbeiten auf dem Gebiete der Schalentheorie in einheitlicher Weise verarbeitet sind, wurde von Praxis und Forschung schon längst gewünscht. Der Verfasser blieb jedoch nicht bei der zusammenfassenden Bearbeitung stehen, sondern gab auch viel Eigenes. Man findet fast in allen Abschnitten wesentliche neue Beiträge des Verfassers zur Schalentheorie. Das Buch wird sich daher bald als unentbehrlich erweisen.

Hannover. Ferd. Schleicher. 509

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr.-Ing. PAUL **WERNERS,** Energie-Übertragung und -Umwandlung mit Wechselstrom. 204 S. Leipzig und Berlin 1935, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 18 M.

Dr.-Ing. F. **MOELLER** und Dipl.-Ing. TH. **WERR,** Elektrotechnik. (Ein Leitfaden für Studium und Praxis, hrsg. von Dr.-Ing. G. Bolz, Berlin, Dr.-Ing. F. Moeller, Berlin, Dipl.-Ing. Th. Werr, München.) Bd. II, Teil 3 und 4, Gleich- und Wechselstrommaschinen. VIII + 125 S. m. 176 Abb. Leipzig und Berlin 1935, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 10 M.

Dr. phil. LUDWIG **HÄNERT,** Marine-Studienrat in Mürwik, Geschütz und Schuß. Einführung in die Geschützmechanik und Ballistik. 2., verb. Aufl. VI + 370 S. m. 161 Textabb. Berlin 1935, Verlag Julius Springer. Preis geb. 27 M.

W. **KRULL,** Idealtheorie. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, herausgegeben von der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik". 4. Bd., 3.) V + 152 S. Berlin 1935, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 17,50 M.

E. **LAMPE,** Studiendirektor der Oberrealschule Elsterschloß in Elsterwerda, und Dr. A. **WAGNER,** Studienassessor in Jena, Mathematik und Wehrsport. (Mathematisch-physikalische Bibliothek, Reihe I, Bd. 80.) 51 S. m. 20 Fig. Leipzig und Berlin 1935, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 1,20 M.

ERNST AUGUST **WEISS,** a. o. Prof. a. d. Rhein. Friedrich-Wilhelm-Universität Bonn, Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik. (Teubners Mathematische Leitfäden, Bd. 41.) VI + 122 S. Leipzig und Berlin 1935, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 7,60 M.

Dr. WERNER **HEINTZE,** Studienrat a. d. Hindenburg-Oberrealschule in Eberswalde, Kristallprojektion im Vergleich mit entsprechenden Erdkarten und mit einer Anwendung auf die Laue-Aufnahmen. (Mathematisch-physikalische Bibliothek, Reihe I, Bd. 82.) IV + 31 S. m. 27 Abb. Leipzig und Berlin 1934, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 1,20 M.

Dr.-Ing. Dr. E. h. WILHELM **NUSSELT,** o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. München, Technische Thermodynamik. (Samml. Göschen Bd. 1084.) 144 S. m. 65 Abb. Berlin und Leipzig 1934, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

FUCHS-HOPF-SEEWALD, Aerodynamik. Bd. 2, 2. Aufl. Theorie der Luftkräfte von R. Fuchs. VII + 310 S., 224 Abb. und einem Anhang. Berlin 1935, Verlag Julius Springer. Preis geb. 30 M.

Dr. GEORG **JOOS,** o. ö. Prof. a. d. Univ. Jena, Lehrbuch der Theoretischen Physik. 2. Aufl. XVI + 676 S. m. 164 Fig. Leipzig 1934, Verlag Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. Preis 24 M.

NACHRICHTEN

Martin Grübler †.

Am 31. Mai starb in Dresden der emeritierte Professor an der Technischen Hochschule, Geh. Hofrat Prof. Dr. phil. h. c., Dr. art. ing. h. c. Martin Grübler. — Grübler wurde am 19. Dezember 1851 in Meerane in Sachsen geboren, wo sein Vater Apotheker war. Nachdem er die höhere Gewerbeschule in Chemnitz mit Auszeichnung absolviert hatte, bezog er die Technische Hochschule in Dresden, um von 1870—73 daselbst Bauingenieurwesen zu studieren. Nach einer zweijährigen praktischen Tätigkeit führte ihn der Wunsch, sich dem Lehrfache zu widmen, an die Hochschule zurück. Er studierte von 1875—1880, seinen Lebensunterhalt durch Erteilung von Privatstunden verdienend, in Dresden und in Leipzig Mathematik und Naturwissenschaften und bestand im Sommer 1880 die technische Oberlehrerprüfung in Dresden. Im Herbst desselben Jahres ging er auf Veranlassung von Zeuner nach Zürich, wo er sich habilitierte und wo er gleichzeitig eine Assistentenstelle bei Herzog (Maschinentechnik) und Fliegner (Mechanik) bekleidete. In diese Zeit fallen seine ersten selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Kinematik, die teils im Zivilingenieur, teils in der Zeitschrift für Mathematik und Physik erschienen. Die anerkennende Beachtung, die diese Arbeiten fanden, drückte sich darin aus, daß Grübler, nachdem er sich im Herbst des Jahres 1885 nach Dresden umhabilitiert hatte, im Frühjahr 1886 als Ordinarius für Mechanik und Festigkeitslehre an das Polytechnikum nach Riga berufen wurde. Dort hat er bis zum Herbst des Jahres 1895 gewirkt; dann veranlaßten ihn die politischen Zustände, einer Aufforderung Müller-Breslaus folgend nach Berlin überzusiedeln, wo er bis zum Jahre 1900 Mechanik und Festigkeitslehre für Bauingenieure vortrug. Als im Jahre 1900 das ihm versprochene Ordinariat endlich errichtet werden sollte, bekam er gleichzeitig einen Ruf, als Nachfolger von Otto Mohr, an die Technische Hochschule in Dresden. Er folgte diesem Ruf und hat bis zu seiner Emeritierung 1920 an der Dresdner Hochschule gewirkt.

Eine große Anzahl schöner Publikationen legen von der Begeisterung Zeugnis ab, mit der Grübler den wissenschaftlichen Problemen nachging. Neben den schon erwähnten Arbeiten zur Kinematik beschäftigten ihn schon von Anfang an Untersuchungen zur Strömungslehre, die in dem Referat über hydraulische Maschinen in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit verarbeitet sind. Anregungen, die aus seiner Lehrtätigkeit entsprangen, führten ihn später auf andere Gebiete der technischen Mechanik. Sehr bekannt geworden sind seine Arbeiten zur Festigkeitslehre, insbesondere die Untersuchungen über die Festigkeit rotierender Scheiben.

Eine vierzigjährige, fruchtbare Lehrtätigkeit an vier Hochschulen, die in seinem Lehrbuch der technischen Mechanik ihren Niederschlag gefunden hat, hat ihm die Dankbarkeit zahlreicher Schüler eingetragen. Als äußere Anerkennung seines unermüdlichen Wirkens ernannte ihn die Universität Gießen 1922 zum Dr. phil. h. c., die lettländische Universität zu Riga im Jahre 1929 zum Dr. art. ing. h. c. Die Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik wird dem trefflichen Manne ein ehrendes Gedächtnis bewahren. Trefftz. 526

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Hauptversammlung in Stuttgart.

Die Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik hielt ihre ordentliche Hauptversammlung und wissenschaftliche Tagung vom 26. bis 28. September in Stuttgart ab, und zwar im Rahmen des 11. deutschen Mathematiker- und Physikertages, der vom 22. bis 29. September daselbst stattfand. — Es wurden die folgenden Vorträge gehalten:

Donnerstag, 26. 9.: 1. W. Müller, Aachen: Anlaufströmung im Kreisring und Kreisrohr. 2. C. Weber, Dresden: Kanalwellen bei geringer Wellenhöhe. 3. M. Schuler, Göttingen: Erzeugung von Oberflächenwellen durch schwingende Körper. 4. C. Weber, Dresden: Theoretischer Ansatz für die Schulerschen Umschlagwellen.

Freitag, 27. 9.: 1. G. Weinblum, Berlin: Modellversuche zur Ausbildung günstigster Schiffsformen. 2. B. Eck, Köln: Experimentelle Behandlung der Strömungslehre. — Abgesehen von diesen beiden Vorträgen war dieser Tag freigehalten für den Besuch der Vorträge über Schwingungsfragen, die von den Physikern gemeinsam mit dem VDI veranstaltet wurden.

Sonnabend, 28. 9.: 1. Th. Pöschl, Karlsruhe: Über eine direkte Methode zur Lösung von Aufgaben der Plastizitätstheorie. 2. G. Vogelpohl, Berlin: Zur hydrodynamischen Theorie der Lagerreibung. 3. H. Neuber, München: Randbedingungen der Hauptspannungs-Stromlinien. 4. K. Ludwig, Hannover: Knickung von Rechtecksplatten mit streifenweise konstanter Dicke. 5. F. Schultz-Grunow, Kassel: Anschauliche Schalentheorie. 6. K. Marguerre, Berlin: Thermoelastische Plattengleichungen. 7. W. Flügge, Göttingen: Bemerkungen zur Theorie statisch unbestimmter Systeme.

Vor den Vorträgen fand Sonnabend, 28. 9., unter Leitung von Herrn Prandtl die ordentliche Hauptversammlung der G. A. M. M. statt. Nachdem der im Laufe des letzten Jahres verstorbenen Mitglieder ehrend gedacht worden war, erstattete der Geschäftsführer, Herr C. Weber, Dresden, Bericht über Mitgliederzahl und Kassenverhältnisse. Dem Vorstand wurde Entlastung erteilt. Gewählt wurden: in den wissenschaftlichen Ausschuß an Stelle der satzungsgemäß ausscheidenden Herren Hamel (Berlin) und Geckeler (Kiel) die Herren Pröll (Hannover) und Funk (Prag), zu Kassenprüfern die Herren Betz (Göttingen) und Flügge (Göttingen). Der ausführliche Jahresbericht wird den Mitgliedern der G. A. M. M. in der üblichen Form zugehen.

Vorträge und Hauptversammlung waren erfreulich reich besucht. — Daß auch der außerwissenschaftliche Teil der Tagung dank der schwäbischen Gastfreundschaft einen harmonischen Verlauf nahm, sei besonders bemerkt.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Über den Heaviside-Kalkül. Herr K. Th. Vahlen zitiert in seiner Arbeit „Über den Heaviside-Kalkül", Band 13, Heft 4, meine Arbeit „Über die Lösung von Schwingungsaufgaben mittels symbolischer Differentialrechnung", Archiv für Elektrotechnik, Band XXIV, Seite 360—382, und zwar nur insofern, als er an zwei, übrigens nicht sehr belangreichen Stellen Unstimmigkeiten zu erkennen glaubt. Der Zweck der vorliegenden Zeilen ist es, zunächst die volle Korrektheit dieser beiden Details nachzuweisen.

Die erste Beanstandung Herrn Vahlens (Seite 294, Fußnote 6 seiner Arbeit) bezieht sich auf die Ableitung der bekannten (speziellen) Heaviside-Gleichung (entsprechend Gl. (54b), Seite 381 meiner Arbeit):

$$f(x) = \frac{1}{Z(0)} + m \sum_{1}^{n} \frac{e^{\alpha_m x}}{\alpha_m Z'(\alpha_m)} \quad . \quad . \quad (54\,\mathrm{b})$$

aus der von mir erstmalig gebrachten Verallgemeinerung der Heaviside-Gleichung (entsprechend 53 b):

$$f(x) - m \sum_{1}^{n} \frac{e^{\alpha_m x}}{\Pi'(\alpha_m)} \Pi_{m0} = m \sum_{1}^{n} \frac{1}{Z'(\alpha_m)}$$

$$\cdot\, e^{\alpha_m x} \int_0^x e^{-\alpha_m x} \left[F(x) - j \sum_{1}^{k} \frac{e^{\beta_j x}}{\Psi'(\beta_j)} \Psi_{j0} \right] dx \quad (53\,\mathrm{b}).$$

Die Richtigkeit der beiden Gl. (53 b) und (54 b) steht nicht zur Diskussion. Sie entsprechen übrigens den Gl. (XI) (9) bzw. (XIII) (6) der Arbeit Vahlens, und es kann sich also nur darum handeln, ob die Spezialisierung der allgemeinen Formel (53 b) auf die Formel (54 b) in richtiger Weise vorgenommen wurde. Um nun jedes Mißverständnis auszuschließen, sei das Wesentliche der in meiner Arbeit in ein wenig knapper Form gebrachten Ableitung mit etwas anderen Worten ausführlicher wiederholt; insbesonders sei der Übersichtlichkeit halber bei der in meiner Arbeit verwendeten, allgemeinen Betrachtungsweise der „Integration über die Wellenstirn" eine einfache spezielle Form der Störungsfunktion wie folgt zugrunde gelegt.

Spezialisieren wir die Störungsfunktion $F(x)$ in Gl. (53 b) in der Weise, daß $F(x)$ für $x < x^*$ verschwindet, für $x = x^*$ um den Betrag eins springt und für $x > x^*$ den konstanten Wert eins besitzt (wobei wir $x^* > 0$ voraussetzen wollen), so kann man für die Lösung $f(x)$, da anfänglich das System in Ruhe ist und bis zum Zeitpunkt $x = x^*$ „nichts geschieht", sicherlich schreiben:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots\ldots\ldots = f^{(n-1)}(0) = 0,$$

d. h. die Lösung ist eine Hauptlösung. Ebenso gilt voraussetzungsgemäß:

$$F(0) = F'(0) = F''(0) = \ldots\ldots\ldots = F^{(k-1)}(0) = 0.$$

Gl. (53 b) läßt sich nun sehr vereinfachen, da die Koeffizienten Π_{m0} und Ψ_{j0} sämtlich verschwinden, und man erhält sofort

$$f(x) = m \sum_{1}^{n} \frac{1}{Z'(\alpha_m)} e^{\alpha_m x} \int_0^x e^{-\alpha_m x} F(x)\, dx$$

$$= m \sum_{1}^{n} \frac{1}{Z'(\alpha_m)} e^{\alpha_m x} \cdot \frac{e^{-\alpha_m x} - e^{-\alpha_m x^*}}{(-\alpha_m)}.$$

Man erkennt, daß $f(x)$ an der Stelle $x = x^*$ stetig ist. Dies gilt jedoch im allgemeinen nicht für die $(n-1)$ ersten Ableitungen, da

$$\lim_{x \to x^*,\, x < x^*} f^{(r)}(x) = 0 \quad \text{ist,} \quad \text{während} \quad \lim_{x \to x^*,\, x > x^*} f^{(r)}(x)$$

für ein beliebiges x^* im allgemeinen von Null verschieden ist.

Um nun auf den Fall des Heavisideschen Einheitsstoßes $E(x)$ überzugehen, lassen wir x^* gegen Null konvergieren. Dann ist $f(x)$ für $x > 0$ durch Gl. (54 b) bestimmt. Man hat dabei zu berücksichtigen, daß

$$m \sum_{1}^{n} \frac{1}{Z'(\alpha_m)} \frac{1}{(-\alpha_m)} = \frac{1}{Z(0)}$$

ist, wie aus Gl. (48)

$$\frac{1}{Z(y)} = m \sum_{1}^{n} \frac{1}{Z'(\alpha_m)(y - \alpha_m)} \quad . \;\; . \;\; . \quad (48)$$

ohne weiteres hervorgeht, wenn man dort $y = 0$ setzt. In meiner Arbeit ist nun in diesem Zusammenhang infolge eines Druckfehlers an Stelle der Gl. (48) die Gl. (28) zitiert, und ich halte es für möglich, daß gerade dieser Druckfehler zu einer mißverständlichen Auffassung meiner Ableitung führen kann. Ich glaube aber, daß aus dem hier genau durchgeführten Rechnungsgang ohne weiteres ersichtlich ist, daß in Wirklichkeit nur Gl. (48) benützt wird, welche selbstverständlich auch für gebrochene Funktionen gilt.

Bildet man aus Gl. (54 b) die $(n-1)$ ersten Ableitungen und setzt man $x = 0$, so findet man, daß sie im allgemeinen nicht verschwinden, d. h. $f(x)$ entsprechend (54 b) ist keine Hauptlösung. Dies ist jedoch kein Widerspruch zur ursprünglichen Annahme, da wir den Unstetigkeitspunkt $x = x^*$ gegen Null gehen ließen, somit $f^{(r)}(0)$ berechnet aus (54 b) $\lim\limits_{x \to 0,\, x > 0} f^{(r)}(x)$ bedeutet und nach dem früher Gesagten im allgemeinen von Null verschieden ist, während $\lim\limits_{x \to 0,\, x > 0} f^{(r)}(x)$ voraussetzungsgemäß Null ist. Die $f^{(r)}(x)$ sind im Gegensatz zur hier vorliegenden Haeviside-Lösung nur bei der später zu besprechenden Casperschen Lösung stetig.

Schließlich möchte ich noch bemerken, daß die Spezialisierung der Gl. (53 b) zu Gl. (54 b) selbstverständlich auch in anderer Weise vorgenommen werden kann, doch erschien mir die gebrachte Ableitung durch „Integration über die Wellenstirn" gerade für den Elektrotechniker besonders anschaulich.

Der zweiten Einwendung des Herrn Vahlen (Seite 297 seiner Arbeit) liegt folgender Sachverhalt zugrunde: Ich zeige auf Seite 376 meiner Arbeit, daß die Lösung von Casper (Archiv für Elektrotechnik 1925, Seite 95) die Eigenschaft hat, daß die $(n-1)$ ersten Ableitungen zur Zeit $t = 0$ verschwinden, d. h. es ist hier $\lim\limits_{x \to 0,\, x > 0} f^{(r)}(x) = 0$. Zu dem selben Resultat kommt Herr Vahlen (Seite 297 seiner Arbeit). Ich bemerke nun, daß im allgemeinen Fall des Heavisideschen Problems (Beschreibung der Vorgänge in einem mehrmaschigen Netz beim plötzlichen Anlegen der Einheitsspannung an das früher in Ruhe befindliche System) die Caspersche Lösung nicht herangezogen werden darf. Es ist nämlich $f''(0)$ ein Maß für die anfänglich in einer Masche wirkende Spannung, und diese wird sowohl bei einfachen als auch bei zusammengesetzten Netzen mindestens bei einer Masche von Null verschieden sein. Dies steht, wie ich selbst ausdrücklich hervorhebe, in keinem Widerspruch zur Casperschen Lösung für den Fall eines einfachen Stromkreises, da hier $n = 2$ ist und die obengenannte Bedingung also nur verlangt, daß die Funktion selbst und der erste Differentialquotient nicht aber der zweite Differentialquotient für $x = 0$ verschwindet. Für den allgemeinen Fall hingegen ist $n > 2$, daher verschwindet bei der Casperschen Lösung auch der zweite Differentialquotient, während bei der Lösung des Heavisideschen Problems, wie erwähnt, der zweite Differentialquotient mindestens bei einer Masche von Null verschieden sein muß.

Herr Vahlen bringt nun auf Seite 297 den Fall eines einfachen Stromkreises und zitiert überdies das Buch Carsons (Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung, erw. deutsche Ausgabe von F. Ollendorf und K. Pohlhausen, Springer 1929) Seite 32, wo ebenfalls das Beispiel eines einfachen Stromkreises behandelt wird. Er hebt hervor, daß hier der zweite Differentialquotient für $x = 0$ nicht verschwindet und bemerkt hierzu, daß dies auch nicht bei der Casperschen Lösung (für $n = 2$) gefordert wird. Es bestehe hier also (im Gegensatz zu meiner Behauptung) keinerlei Widerspruch. Es scheint also Herr Vahlen zu übersehen, daß ich, wie in meiner Arbeit ausdrücklich angegeben, an der beanstandeten Stelle den allgemeinen Fall $(n > 2)$ behandle.

Ich möchte die Gelegenheit benützen, um festzustellen, daß der Beweis der Heaviside-Gleichung ausgehend vom Ansatz $f(D)\,y = g(D)\,z$, also unabhängig von der bekannten funktionstheoretischen Betrachtung K. W. Wagners, meines Wissens erstmalig in meiner erwähnten Arbeit angegeben wurde, wobei sich auch eine Verallgemeinerung der Heavisideschen Lösung auf einen beliebigen Anfangszustand des Systems bei Anlegen einer Spannung beliebiger Form (entsprechend den Formeln (53) bzw. (53 a) und (53 b) auf Seite 380 und 381 meiner Arbeit) ergibt. Ich halte diesen Hinweis für eine wünschenswerte Ergänzung der Zitate meiner Arbeit durch Herrn Vahlen, welche die Prioritätsfrage in keiner Weise berühren.

Wien. W. Gauster. 531

Erwiderung. Die Differentialgleichung (Bd. 13, S. 293)

$$f(D)\,y = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

hat die zu $x = 0$ gehörige Hauptlösung

$$\frac{1}{f(0)} + \sum_i \frac{e^{o_i x}}{o_i f'(o_i)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Die Gleichung

$$f(D)\,y = g(D)\,1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

hat die Lösung

$$\frac{g(0)}{f(0)} + \sum_i \frac{g(o_i)}{o_i f'(o_i)} e^{o_i x} \quad . \; . \; . \quad (6).$$

Dies ist nicht die Hauptlösung, denn sie verschwindet zwar für $x = 0$, aber die $n-1$ ersten Ableitungen werden für $x = 0$ gleich

$$\sum_i \frac{g(o_i)\, o_i{}^h}{f'(o_i)} \qquad (h = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-2) \; . \quad (7)$$

und diese Summen verschwinden nur sämtlich, wenn g vom Grade 0 ist. Man kann die Lösung (6) von (4) auch dahin ausdrücken, daß man sagt, die Lösung (3) von (1) gilt auch, wenn statt der ganzen Funktion f die gebrochene $\dfrac{f}{g}$ gesetzt wird.

Die Gleichung

$$f(D)\,y = z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1')$$

mit

$$z(x) = 0 \quad \text{für} \quad x < 0$$

$$z(x) = 1 \quad \text{für} \quad x \geqq 0$$

hat die Hauptlösung

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \quad \text{für } x < 0 \\ y &= (3) \ \text{für } x \geqq 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (3').$$

Die Gleichung

$$f(D)\,y = g(D)\,z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4')$$

mit

$$z(x) = 0 \quad \text{für} \quad x < 0$$

$$z(x) = 1 \quad \text{für} \quad x \geqq 0$$

hat die Lösung

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \quad \text{für } x < 0 \\ y &= (6) \ \text{für } x \geqq 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (6').$$

Die Hauptlösung von (4) ist

$$\frac{g(0)}{f(0)} + \sum_i \frac{g(0)}{\varrho_i\, f'(\varrho_i)}\, e^{\varrho_i x} \quad . \; . \; . \quad (8),$$

die von (4′) ist

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \quad \text{für } x < 0 \\ y &= (8) \ \text{für } x \geqq 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (8').$$

(6′) ist die Heaviside-Lösung, (8′) ist die Caspar-Lösung von (4′).

Herr Gauster leitet unter der Annahme (S. 381, Z. 9): „Das System sei ursprünglich im Ruhezustand" die Heaviside-Lösung her. Die Annahme des Ruhezustandes bedeutet doch die Annahme der Anfangsbedingungen

$$y_0 = 0, \quad y_0' = 0, \quad .\,., \quad y_0^{(n-1)} = 0 \; . \; . \quad (9),$$

oder das Verschwinden der Summen (7), also das Bestehen der Gleichungen (28) S. 371 bei Gauster.

Herr Gauster bezeichnet die Caspar-Lösung als „falsch" (S. 376). Das ist unberechtigt. Als Heaviside-Aufgabe muß man (4′) ansehen, als zwei partikuläre Lösungen (6′) und (8′). Letztere ist die Hauptlösung, für erstere sind Anfangsbedingungen nicht gegeben, durch die sie gekennzeichnet werden könnte.

Herr Gauster will die Unrichtigkeit der Caspar-Lösung daraus herleiten, „daß diese Randbedingungen (9) nicht allgemein zutreffen können" (S. 376, Z. 19). „Man sieht dies schon etwa unmittelbar daraus, daß bei Reihenschaltung von L, C und $R\,(=w)$ bei Anlegen des Einheitsstoßes die gesamte Spannung vorerst an der Selbstinduktion liegt, so daß der 2. Differentialquotient der Ladung q durch die Gleichung

$$L\,\frac{d^2 q}{d\,t^2} = 1$$

bestimmt ist, also z. Zt. $t = 0$ nicht verschwindet." Herr Gauster greift also auf den einfachsten Fall einer einzigen Masche, also auf die Gleichung (S. 361)

$$\left(\frac{1}{C} + w\,\frac{d}{d\,t} + L\,\frac{d^2}{d\,t^2}\right) q = 1$$

zurück, in welchem $n = 2$ ist, also (9) nur das Verschwinden von q und $\dfrac{d\,q}{d\,t}$ für $t = 0$ fordert. Die Randbedingungen (9) sind also erfüllbar. Aber auch für $n > 2$ sind sie im Fall (1′) erfüllbar, da hier die Heaviside-Lösung die Hauptlösung ist. Das Nichterfülltsein der Randbedingungen (9) tritt erst bei dem allgemeinen Fall (4′) ein; hier scheidet sich Heaviside- und Caspar-Lösung.

Berlin. Vahlen. 531a

Die Verwendung nomographischer Methoden zur numerischen Integration von Differentialgleichungen. Zu dieser Arbeit des Herrn H. Mehlig[1]) erlaube ich mir, folgendes zu bemerken:

1. Daselbst wird eine Vertafelung des folgenden Systems (S) von simultanen Funktionsbeziehungen gegeben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,p_1}{d\,\alpha} &= -\,p_1\,\Phi_1(\alpha) - \frac{1}{\Phi_2(\alpha)}\,p_1^{\frac{3m-1}{2m}}\,W, \\ W &= \left\{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1+\frac{1}{m}}\right\}^{1/2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (1),$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,p_2}{d\,\alpha} &= -\,\Phi_3(\alpha)\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{m}}\frac{d\,p_1}{d\,\alpha} \\ &\quad -\,\Phi_4(\alpha)\,p_2^{1-\frac{1}{m}}\,p_1^{\frac{1}{m}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Der günstige formale Bau des Systems ermöglicht die folgenden weiteren drei Lösungen, deren schematische Herleitung vielleicht von einigem Interesse sein dürfte:

a) Unter Benutzung des Gedankens von H. Mehlig, Zwischenrechnungen zuzulassen, ergibt sich folgende erste Lösung: Eine anfängliche, zwei Zwischenrechnungen, einfach kotierte Punkte, ein unterbrochener Fluchtlinienzug.

b) Eine zweite Lösung ergibt folgende Tafel: Eine anfängliche, keine Zwischenrechnungen, einfach kotierte Punkte, ein ununterbrochener Fluchtlinienzug.

c) Die dritte Lösung erfordert schließlich keine Nebenrechnungen, hat „Doppelkotenpunkte", ferner ebenfalls einen einzigen ununterbrochenen Fluchtlinienzug.

Die Lösung a) erfordert die geringsten, die Lösung c) die größten Vorkenntnisse aus der Nomographie zu ihrem Entwurf; alle Lösungen beruhen jedoch bloß auf durchaus bekannten gebräuchlichen Verfahren.

2. Erste Lösung: Wie leichte Umformungen zeigen, kann (S) auf folgende allgemeine Gestalt gebracht werden:

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= F_1 + F_2 \\ G_2 &= F_3 + F_4 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha_1).$$

Hierin ist:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= f_1(p_1)\,g_1(\alpha) \\ F_2 &= f_2(p_1)\,h_1\!\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \\ G_1 &= g_2(\alpha)\,\frac{d\,p_1}{d\,\alpha} \\ F_3 &= g_3(\alpha)\,\frac{d\,p_1}{d\,\alpha} \\ F_4 &= g_4(\alpha)\,f_3(p_1) \\ G_2 &= h_2\!\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\frac{d\,p_2}{d\,\alpha} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (\beta_1).$$

Unter Anwendung desselben Verfahrens wie a. a. O. ergibt sich die in Abb. 1 schematisch dargestellte Tafel. Wie ersichtlich, ist dieselbe gegenüber derjenigen von H. Mehlig durch größere innere Symmetrie ausgezeichnet, auch ist es möglich, ohne Zapfenlinien auszukommen. — Auch hier können,

[1]) Diese Z. 14 (1934), H. 2, S. 122.

wie a. a. O., die Vorteile der logarithmischen Teilungen verwertet werden.

Die Größe (p_2/p_1) wird vor Benutzung, die Größen G_1 und G_2 während derselben durch einfache Nebenrechnung gebildet. Aus dem in der Abb. 1 eingetragenen Linienzug 1 . . . . 17 dürfte wohl alles hervorgehen.

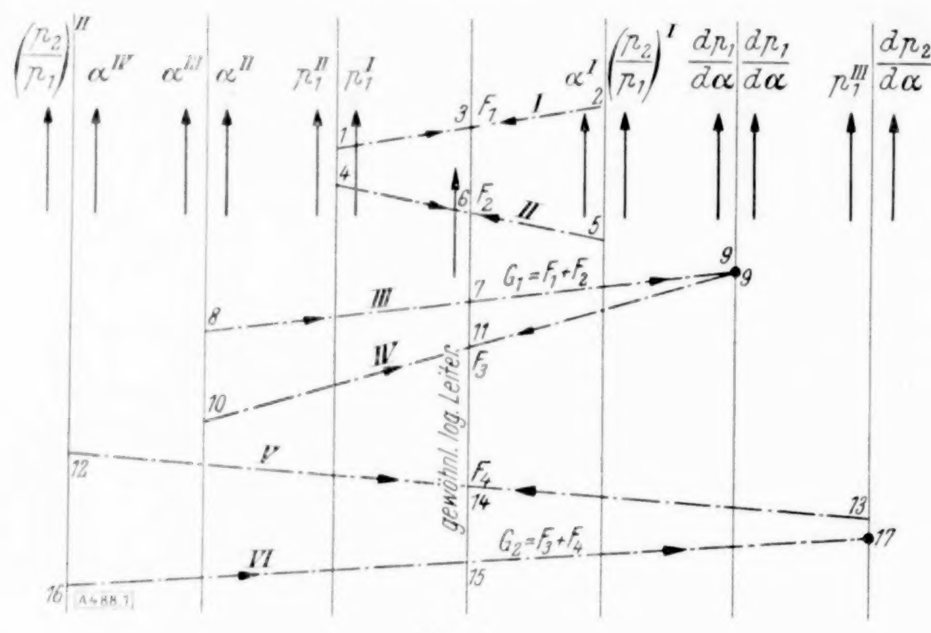


Abb. 1.

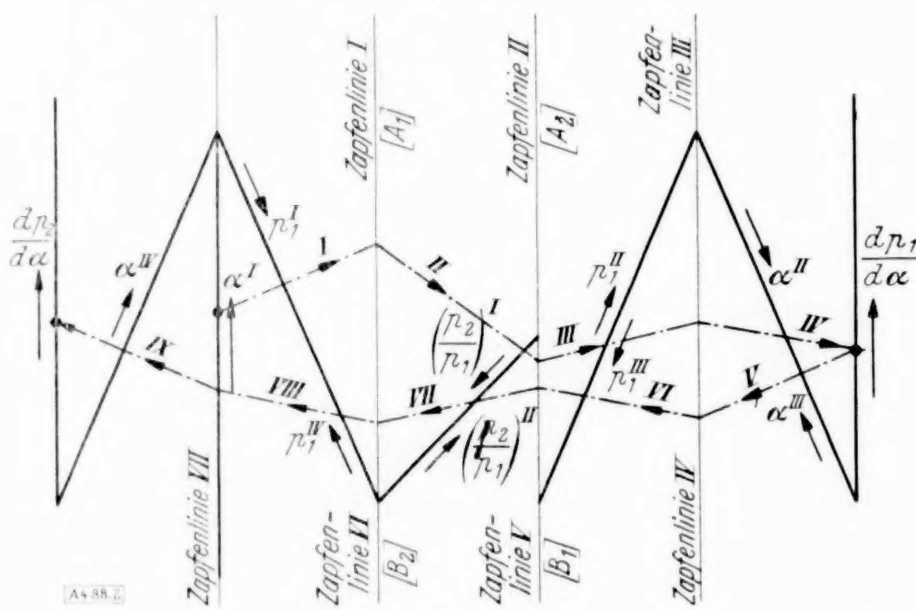


Abb. 2.

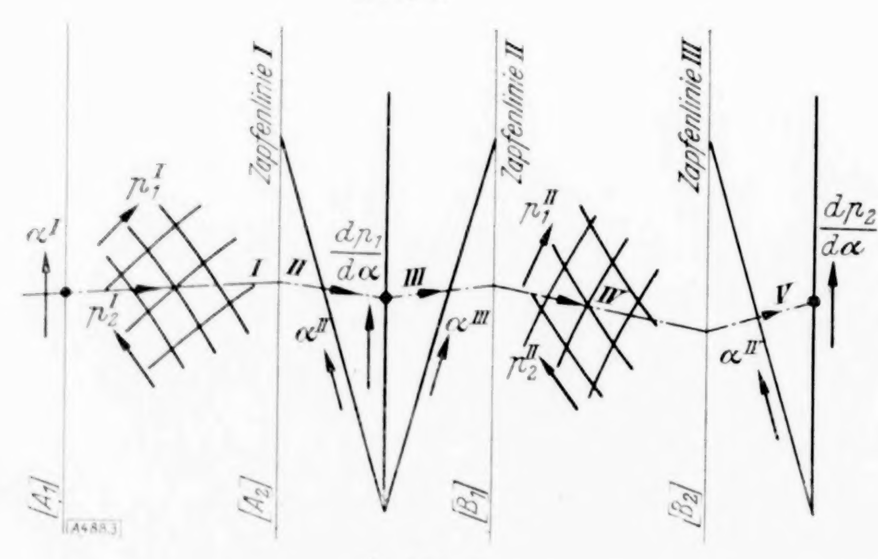


Abb. 3.

3. Zweite Lösung: Dieselbe geht von folgender Form des Systems (S) aus:

$$\left.\begin{aligned} A_1\,\varphi\left(\frac{p_1}{p_1}\right) + A_2 &= 1 \\ B_1 + B_2\,\psi\left(\frac{p_2}{p_1}\right) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha_2).$$

Hierin ist:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= F_1(p_1)\,G_1(\alpha) \\ A_2 &= F_2(p_1)\,G_2(\alpha)\,\frac{d\,p_1}{d\,\alpha} \\ B_1 &= F_3(p_1)\,G_3(\alpha)\,\frac{d\,p_1}{d\,\alpha} \\ B_2 &= F_4(p_1)\,G_4(\alpha)\,\frac{d\,p_2}{d\,\alpha} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (\beta_2).$$

Das entsprechende Rechenbild zeigt schematisch Abb. 2. Es ist vielleicht beachtenswert, daß es ebenfalls bloß geradlinige Leitern besitzt, ohne daß jedoch, wie a. a. O. und auch vorstehend, Logarithmen herangezogen werden müßten. Die Größe (p_2/p_1) wird, wie bereits erwähnt, anfänglich gebildet.

4. Dritte Lösung: Dieselbe ergibt sich auf Grund folgender Form des gegebenen Systems:

$$\left.\begin{aligned} A_1\,\varphi_1(p_1, p_2) + A_2\,\varphi_2(p_1, p_2) &= 1 \\ B_1\,\psi_1(p_1, p_2) + B_2\,\psi_2(p_1, p_2) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (\alpha_3).$$

Hierin ist:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= F_1(\alpha) \\ A_2 &= F_2(\alpha)\,\frac{d\,p_1}{d\,\alpha} \\ B_1 &= G_1(\alpha)\,\frac{d\,p_1}{d\,\alpha} \\ B_2 &= G_2(\alpha)\,\frac{d\,p_2}{d\,\alpha} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (\beta_3).$$

Das entsprechende Rechenbild zeigt Abb. 3.

5. Da die Leitern für die Veränderliche α ebenfalls in allen drei Lösungen bloß auf den geradlinigen Trägern vorkommen, können also bei Änderung der Größen $f, \varepsilon_k, \varepsilon_z$ die Tafeln wie a. a. O. rasch den geänderten Verhältnissen angepaßt werden. — Über den praktischen Wert der Tafeln kann natürlich erst ihr tatsächlicher Entwurf entscheiden; in grundsätzlicher Hinsicht dürften sie jedoch wohl den Vorzug vor der Lösung von H. Mehlig beanspruchen.

Prag. Alexander Fischer. 488

Erwiderung. In meiner oben angeführten kurzen Mitteilung wies ich auf die Verwendbarkeit nomographischer Methoden bei der numerischen Integration von Differentialgleichungen hin und erläuterte die Brauchbarkeit dieses Verfahrens an einem einfachen Beispiel. Herr Fischer hat sich nun die Mühe gemacht, dieses Gleichungssystem auch noch mit anderen Methoden der Nomographie in grundsätzlicher Form darzustellen, ohne indes auf die allein entscheidende praktische Eignung dieser Darstellungen einzugehen.

Da sich meine Ausführungen nicht auf die Form der nomographischen Wiedergabe des Gleichungssystems, sondern auf die Erleichterung der zahlenmäßigen Integration von Differentialgleichungen unter Zuhilfenahme der Nomographie bezogen, so habe ich den Ausführungen des Herrn Fischer nichts hinzuzufügen, zumal seine Darstellungen sich allgemein bekannter nomographischer Methoden bedienen.

Hannover. Hans Mehlig. 488a

Druckfehlerberichtigung. In dem Nachruf für Prof. Neuendorff ist ein Druckfehler unterlaufen: das Geburtsjahr des Verstorbenen ist 1877, nicht 1873.

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. E. Trefftz, Dresden-A. 24, Kulmstr. 1. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.